

Preprint No. M 10/13

**Zur Numerik nichtlinearer
dynamischer Systeme**

Teil 2: Periodische Schwingungen

Vogt, Werner

Oktober 2010

Impressum:

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau
Tel.: +49 3677 69-3621
Fax: +49 3677 69-3270
<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

Zusammenfassung Der Beitrag stellt wesentliche Algorithmen zur Berechnung und Analyse periodischer Orbits nichtlinearer dynamischer Systeme vor. Während Schießverfahren und Mehrfach-Schießverfahren für periodisch erregte Systeme einfach zu realisieren sind, müssen sie bei autonomen Systemen mittels sogenannter Phasenbedingungen angepasst werden. Für die Poincaré-Abbildung wird zudem ein numerischer Algorithmus vorgestellt. Den Schwerpunkt bilden parameterabhängige Systeme, für die praktikable numerische Fortsetzungsmethoden genutzt werden. Schließlich werden auftretende Bifurkationen einschließlich der Torus-Bifurkation (Neimark-Sacker-Bifurkation) klassifiziert und Verfahren zu deren Detektierung vorgestellt. Zahlreiche durchgerechnete Beispiele, eine Anwendung in der nichtlinearen Elektrotechnik und Aufgaben dienen der Veranschaulichung der abstrakten Sachverhalte.

MSC 2010: 37M20, 65P30, 65P40, 65L10

Keywords: Computational methods for bifurcation problems, nonlinear stabilities, boundary value problems

1 Einleitung

In vielen Anwendungen der Natur- und Ingenieurwissenschaften treten Schwingungsprobleme mit periodischen Lösungen zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme auf. Derartige Lösungen befinden sich nicht als Ruhelagen im Gleichgewicht, sondern schwingen mit einer konstanten Schwingungsdauer, der *Periode* T der Bewegung. So besitzt das autonome System von Langford (1984)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (x_3 - 0.7)x_1 - \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + (x_3 - 0.7)x_2 \\ \dot{x}_3 &= 0.6 + x_3 - x_3^3/3 - (x_1^2 + x_2^2)(1 + \varrho x_3) + \varepsilon x_3 x_1^3\end{aligned}\tag{1}$$

einen periodischen Orbit, der auf einer toroidalen Fläche verläuft und in Abbildung 1 zu sehen ist.

Bezeichnet $\varphi_t : D \rightarrow D$ mit der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ den Fluss eines zeitkontinuierlichen dynamischen Systems

$$\dot{x} = f(x), \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \text{ offen}, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}\tag{2}$$

mit $t \in \mathbb{R}$, so ist eine Lösung $x(t; x_0) = \varphi_t(x_0)$ durch $x_0 \in D$ *periodisch*, wenn es eine Konstante $T > 0$ mit $\varphi_T(x_0) = x_0$ gibt. Existiert ein kleinstes derartiges $T > 0$, die Periode der Bewegung, so nennt man die Lösung T -periodisch. Ein periodischer Orbit

$$\gamma := \{x \in D \mid x = \varphi_t(x_0), t \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_T(x_0) = x_0\}$$

sei ein *Grenzykel*. Dann ist der Orbit γ isoliert, d. h. es existiert eine Umgebung $U(\gamma)$, die keine weiteren periodischen Orbits enthält.

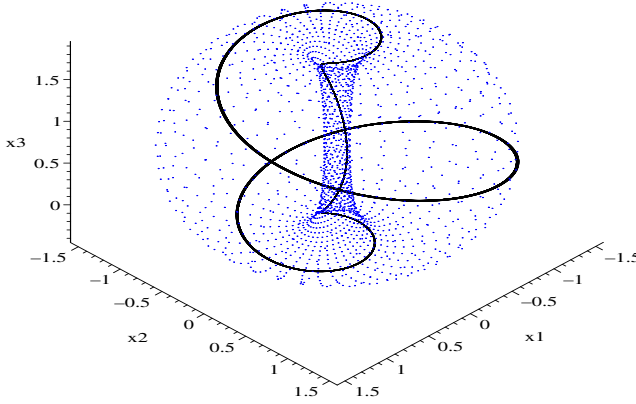


Abb. 1 Phasenraum-Darstellung eines periodischen Orbits und des Torus zu System (1). Parameterwerte sind $\omega = 3.5$, $\varepsilon = 0.03$ und $\varrho = 0.25$

Beispiel 1

Für feste Parameterwerte $\varepsilon > 0$ und $\omega > 0$ besitzt das nichtlineare autonome System

$$\dot{x}_1 = \varepsilon x_1 - \omega x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = \omega x_1 - \varepsilon x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (3)$$

zum Anfangswert $x_0 = (\sqrt{\varepsilon}, 0)^T$ einen isolierten periodischen Orbit mit der Darstellung

$$\varphi_t(x_0) = \sqrt{\varepsilon}(\cos \omega t, \sin \omega t)^T,$$

wie man leicht nachrechnet. Dagegen hat bei vorgegebenem $\omega > 0$ das lineare System

$$\dot{x}_1 = -\omega x_2, \quad \dot{x}_2 = \omega x_1 \quad (4)$$

zu $x_0 = (c, 0)$ mit beliebig gewähltem $c \in \mathbb{R}$ stets einen periodischen Orbit $\varphi_t(x_0) = c(\cos \omega t, \sin \omega t)^T$, so dass keiner dieser Orbits isoliert ist. ■

Falls $\varphi_t(x)$ periodisch mit Periode $T > 0$ ist, so ist aufgrund der Translationsinvarianz zu jedem festen $\tau \in \mathbb{R}$ auch $\varphi_{t+\tau}(x)$ periodisch. Dann gilt

$$\varphi_{t+T}(x) = \varphi_t(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Die Phasenkurve γ eines Zyklus ist zudem geschlossen und einfach zusammenhängend (doppelpunktfrei), wie in Abbildung 1 dargestellt.

Bemerkung 2

Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen über periodische Orbits allgemeiner n -dimensionaler nichtlinearer Systeme (2) mit numerisch leicht überprüfbaren Voraussetzungen sind nicht verfügbar. Andererseits schränken spezielle Zusatzannahmen die Problemklasse meist stark ein. Typische Sätze mit hinreichenden Bedingungen für ebene Systeme in \mathbb{R}^2 liefert die Poincaré-Bendixson-Theorie, die man u. a. bei Perko (1996) findet. Eine Verallgemeinerung auf Systeme in \mathbb{R}^n stellt der Satz von R. A. Smith dar (vgl. Reitmann (1996)), dessen Voraussetzungen jedoch im Allgemeinen schwer verifizierbar sind. In der Umgebung eines Hopf-Bifurkationspunktes garantiert der Satz von E. Hopf (vgl. Marx und Vogt (2010)) ebenfalls die Existenz eines Grenzykels. ■

Um die Problemklasse nicht von vornherein einzuschränken, wollen wir deshalb die Existenz eines Grenzykels stets voraussetzen, sobald dies erforderlich wird.

2 Periodisch erregte Systeme

In diesem Abschnitt unterdrücken wir die Parameterabhängigkeit der DGL und suchen für feste Parameterwerte eine periodische Lösung x^* . Zuerst betrachten wir periodisch angetriebene Schwingungssysteme, deren „Systemantwort“ auf die Erregungsschwingung von Interesse ist. Charakteristisch ist dabei, dass die Periode T des gesuchten Zyklus vorgegeben und damit bekannt ist! Numerische Verfahren sind damit einfacher aufgebaut als im autonomen Fall, den wir anschließend behandeln wollen.

Wir notieren periodisch erregte DGL-Systeme in der Form

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad D \text{ offen}, \quad (6)$$

und setzen die Existenz eines Grenzzykels sowie die hinreichende Glattheit des in t periodischen Vektorfeldes f voraus, d. h. alle partiellen Ableitungen bis zur r -ten Ableitung existieren und sind stetig:

Voraussetzung 3 (Glattheit, Periodizität und Lösungsexistenz)

- i. $f \in C^r(D \times \mathbb{R})$, $r \geq 2$.
- ii. Es existiert ein $T > 0$, so dass gilt: $f(x, t + T) = f(x, t) \quad \forall (x, t) \in D \times \mathbb{R}$.
- iii. System (6) besitzt einen Grenzzykel $x^*(t)$ der Periode T .

Wegen Voraussetzung i. ist offenbar $x^* \in C^{r+1}(\mathbb{R})$. Zudem genügt es nach Voraussetzung ii., die Aufgabe auf einem Intervall $I = [t_0 + T, t_0]$ zu betrachten, wobei stets $t_0 = 0$ gesetzt werden kann. Denn ist $x^*(t)$ für $t \in [0, T]$ bekannt, so kann die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt werden. Betrachten wir drei typische praxisnahe Beispiele:

Beispiel 4

1. Die *Duffing-Van-der-Pol-Gleichung* (vgl. Abraham und Shaw (1989), Lynch (2001)) mit $\alpha, \beta, \delta, \lambda, \omega > 0$

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = \lambda \cdot \cos(\omega t)$$

beschreibt ein periodisch angetriebenes Pendel mit kubischer Rückstellkraft. Mit der Auslenkung $x_1 = x$ und der Geschwindigkeit der Masse $x_2 = \dot{x}$ ergibt sich das System mit der Erregungsperiode $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 - \alpha x_1^3 - \delta x_2 + \lambda \cdot \cos(\omega t).$$

Gesucht ist eine sogenannte *harmonische Lösung* derselben Periode $T = T_0$.

2. Die Modellgleichung 2. Ordnung vom Mathieuschen Typ (vgl. Philippow und Büntig (1992))

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x}^3 - \beta \dot{x} + (1 - \delta \cdot \sin 2t) \cdot x = 0$$

mit $\alpha, \beta, \delta > 0$ und Erregungsperiode $T_0 = \pi$ beschreibt ein *parametrisch erregtes elektrisches Netzwerk*. Außer der stets existierenden trivialen Nulllösung sind sogenannte *2-fach subharmonische Lösungen* mit Periode $T = 2T_0 = 2\pi$ zu ermitteln.

3. E. Philippow und W. Büntig entwickelten in der Monografie Philippow und Büntig (1992) auch Modellgleichungen für subharmonisch reagierende elektrische Netzwerke, die bei harmonischer Erregung eine exakt k -fach subharmonische Schwingung (Strom bzw. Spannung) erzeugen. So sind für

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x} + x + b(4x^3 - 3x) = B \cdot \cos 3t$$

mit $\varepsilon, b, B > 0$ und Erregungsperiode $T_0 = \frac{2\pi}{3}$ periodische Lösungen mit $T = 3T_0 = 2\pi$ gesucht, die als *3-fach subharmonisch* bezeichnet werden. Im Allgemeinen ist $T = k \cdot T_0$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, für jede k -fach subharmonische Lösung. ■

Mit der vorgegebenen Lösungsperiode T ist eine auf dem Periodizitätsintervall $I = [0, T]$ stetig differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gesucht, die dem *Zweipunkt-Randwertproblem*

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(T) = x(0), \quad 0 < t < T, \quad (7)$$

genügt. Dafür können die bekannten numerischen Lösungsverfahren wie *Anfangswertverfahren* (*Schießverfahren*), *Finite-Differenzen-Verfahren* oder *Kollokationsverfahren* eingesetzt werden. Während die beiden letztgenannten Verfahren unmittelbar eine Diskretisierung der Lösung vornehmen und ursprünglich für statische Randwertprobleme, z. B. Biegeprobleme, entwickelt wurden, trägt das Schießverfahren (auch: ballistische Methode) dem dynamischen Charakter des Problems mit t als Zeitkoordinate Rechnung. Wir wollen deshalb hier nur den ersten Zugang vorstellen und verweisen auf die umfangreiche algorithmische Darstellung der anderen Verfahren in Hoffmann et al. (2006).

2.1 Einfaches Schießverfahren

Wir betrachten zu gegebenem Problem (7) das assoziierte Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = s \quad \text{mit} \quad s \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in I = [0, T] \quad (8)$$

und nehmen vorerst an, dass (8) zu jedem $s \in D$ eine auf I eindeutige Lösung $x(t, s)$ besitzt. Die geforderte Periodizitätsbedingung $x(T, s) = x(0, s)$ wird damit im Allgemeinen nicht zu erfüllen sein. Definieren wir deshalb die Differenzfunktion $g : D \rightarrow D$ mit

$$g(s) := x(T, s) - s, \quad (9)$$

so löst $x(t, s^*)$ mit $s^* \in D$ genau dann das Randwertproblem (7), wenn der n -dimensionale Vektor $s = s^*$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$g(s) = 0, \quad s \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (10)$$

ist. Damit wird das Schwingungsproblem für eine reelle Vektorfunktion formal auf ein endlich dimensionales Nullstellenproblem in \mathbb{R}^n reduziert, wofür leistungsfähige Verfahren verfügbar sind (vgl. Hoffmann et al. (2005), Kapitel 21).

Um den gesamten Integrationsaufwand für das Randwertproblem niedrig zu halten, setzen wir ein überlinear konvergentes Verfahren zur Gleichungslösung ein. Das Newton-Verfahren für das Gleichungssystem (10) lautet in der Standardform

$$s_{k+1} = s_k - [g'(s_k)]^{-1} g(s_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s_0 \in D \quad (11)$$

mit der Jacobi-Matrix (desweiteren als „Newton-Matrix“ bezeichnet)

$$g'(s) = \frac{\partial x}{\partial s}(T, s) - I_n, \quad I_n = n\text{-reihige Einheitsmatrix.}$$

Die aufwändige Invertierung dieser Matrix vermeiden wir durch Umstellung der Verfahrensgleichung (11) nach der Newton-Korrektur $d_k = s_{k+1} - s_k$, womit die praktikablere Form des Newton-Verfahrens entsteht:

Iteriere für $k = 0, 1, 2, \dots$, beginnend mit s_0 :

(1) Berechne die Newton-Matrix $g'(s_k) = \frac{\partial x}{\partial s}(T, s_k) - I_n$.

(2) Löse das lineare Gleichungssystem nach d_k

$$g'(s_k) d_k = -g(s_k). \quad (12)$$

(3) Korrigiere $s_{k+1} = s_k + d_k$.

Um hieraus einen Algorithmus zu entwickeln, sollten wir zuerst folgende Fragen klären:

1. Wie kann die $(n \times n)$ -Matrixfunktion $\frac{\partial x}{\partial s}(T, s)$ ermittelt werden?
2. Sind alle dabei auftretenden Anfangswertprobleme auf ganz $I = [0, T]$ lösbar?
3. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen (an das Ausgangsproblem) kann die lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens garantiert werden?

Beantworten wir die erste Frage, indem wir eine Lösung $x(t, s)$ des AWP (8) in die DGL einsetzen

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, s) = f(x(t, s), t), \quad x(0, s) = s.$$

Differenzieren wir diese Gleichungen nach den Anfangswerten s , so erhalten wir mit der Glattheitsvoraussetzung ein AWP für die Matrixfunktion $X(t, s) = \frac{\partial x}{\partial s}(t, s)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x}{\partial s}(t, s) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, s), t) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(t, s), \quad \frac{\partial x}{\partial s}(0, s) = I_n. \quad (13)$$

Zur Vereinfachung der Notation führen wir nun folgende Begriffe ein:

Definition 5 (Variationssystem)

$x(t, s)$ sei die Lösung des AWP (7) mit $s \in D$. Die Matrixfunktion $A : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$A(t, s) := \frac{\partial f}{\partial x}(x(t, s), t) = D_x f(x(t, s), t)$$

heißt zugehörige *Jacobi-Matrix*. Die Matrix-DGL für $X : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\dot{X} = A(t, s) \cdot X, \quad \dot{X} = \frac{\partial}{\partial t} X(t, s) \quad (14)$$

heißt zugehöriges *Variationssystem*. Die Matrixfunktion $X : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\dot{X} = A(t, s) \cdot X, \quad X(0, s) = I_n \quad (I_n \text{ Einheitsmatrix}) \quad (15)$$

ist die bei $t = 0$ *normierte Fundamentalmatrix (Hauptfundamentalmatrix)*.

Wegen der Darstellung (13) für die gesuchte Matrix gilt offenbar

$$X(t, s) \equiv \frac{\partial x}{\partial s}(t, s), \quad (t, s) \in I \times D,$$

womit sich die gesuchte Ableitung $g'(s_k)$ des Newton-Verfahrens zu

$$g'(s_k) = X(T, s_k) - I_n \quad (16)$$

ergibt. Die Hauptfundamentalmatrix $X(t, s)$ kann also durch eine simultane Integration des linearen Variationssystems (15) gewonnen werden, womit sich am Intervallende die Newton-Matrix $g'(s_k)$ ergibt. Der Algorithmus 6 des *einfachen Schießverfahrens (simple shooting)* liefert zu vorgegebener Startnäherung $s_0 \in \mathbb{R}^n$ und Toleranz tol in Schritt 1 eine Lösung s^* des Gleichungssystems. Mit dem Startvektor $x^*(0) = s^*$ gewinnen wir durch Integration des AWP in Schritt 2 anschließend die gesuchte periodische Lösung $x^*(t) = x(t, s^*)$.

Um die Fragen 2 und 3 zu beantworten, erinnern wir uns daran, dass ein Gleichungssystem $g(s) = 0$ mit dem Newton-Verfahren lokal eindeutig lösbar ist, wenn die Lösung s^* regulär ist (vgl. Hoffmann et al. (2005), Kap.21). Den entsprechenden Begriff für die Lösung $x^*(t)$ des Randwertproblems liefert

Definition 7 (Reguläre Lösung)

Voraussetzung 3 sei erfüllt. Die Lösung $x^*(t)$ heißt *regulär* (auch: *isoliert*), wenn das assoziierte linear-homogene Randwertproblem

$$\dot{z} = D_x f(x^*(t), t)z, \quad z(T) = z(0) \quad (17)$$

zu Randwertproblem (7) nur die triviale Lösung $z(t) \equiv 0$ besitzt.

ALGORITHMUS 6 (Einfaches Schießverfahren)Function $[s^*] = \text{shooting}(f, D_x f, T, s_0, \text{tol}, kmax)$ 1. Für $k = 0, 1, \dots, kmax$ iteriere:1.1. (Anfangswertprobleme) Löse die $n + 1$ Systeme für $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) & , \quad x(0, s_k) = s_k \\ \dot{X} &= D_x f(x(t, s_k), t) \cdot X, & X(0, s_k) = I_n.\end{aligned}$$

Ergebnis: $x(T, s_k) \in \mathbb{R}^n$, $X(T, s_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1.2. (Nullstellenaufgabe) Bilde die Funktionen

$$\begin{aligned}g(s_k) &:= x(T, s_k) - s_k \\ g'(s_k) &:= X(T, s_k) - I_n.\end{aligned}$$

1.3. (Newton-Schritt) Löse das lineare System

$$g'(s_k) \cdot d_k = -g(s_k).$$

1.4. Falls $\|d_k\| < \text{tol} \cdot (1 + \|g(s_k)\|)$, so gehe zu Schritt 2.1.5. (Newton-Korrektur) Aktualisiere $s_{k+1} := s_k + d_k$.2. Setze $s^* := s_k$ und löse das AWP

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = s^*, \quad t \in [0, T].$$

3. Return s^*

Die Eindeutigkeit der Null-Lösung z bedeutet, dass die Linearisierung nicht singular ist, womit numerische Verfahren wie das Newton-Verfahren anwendbar werden. Jede reguläre Lösung $x^*(t)$ ist insbesondere lokal eindeutig (auch: geometrisch isoliert), d. h. es existiert eine Konstante $r > 0$, so dass in einer Umgebung $\mathcal{U}[x^*; r] := \{x \in C(I) \mid \sup_{t \in I} \|x(t) - x^*(t)\| \leq r\}$ um die Lösung keine von $x^*(t)$ verschiedene Lösung des Randwertproblems existiert. Für derartige Lösungen findet man bei Keller (1976) den

Satz 8

Die reguläre Lösung $x^*(t)$ erfülle die Voraussetzungen 3 mit $f \in \mathcal{C}^2(I \times D)$ und der Lipschitz-Konstanten $L := \sup_{I \times D} |D_x f(t, x)|$. Dann existiert eine Umgebung

$$\mathcal{K}[s^*; \varrho] = \{s \in D \mid \|s - s^*\| \leq \varrho\}, \quad \text{mit} \quad \varrho := r e^{-LT}$$

des Anfangswertes $s^* = x^*(0)$ mit folgenden Eigenschaften:

- i. Das AWP (8) besitzt zu jedem $s \in \mathcal{K}[s^*; \varrho]$ eine eindeutige Lösung $x(t, s) \in \mathcal{C}^1(I)$.

- ii. Die bei $t = 0$ normierte Fundamentalmatrix $X(t, s)$ existiert als Lösung von (15) und genügt der Identität

$$X(t, s) \equiv \frac{\partial x}{\partial s}(t, s), \quad (t, s) \in I \times \mathcal{K}[s^*; \varrho].$$

- iii. $x^*(t) = x(t, s^*)$ ist genau dann eine reguläre Lösung des Randwertproblems (7), wenn $s^* = x^*(0)$ reguläre Lösung des Gleichungssystems $g(s) = 0$ ist.

Dieser Satz garantiert die Durchführbarkeit des Schießverfahrens 6, wenn nur die Startnäherung s_0 hinreichend nahe der Lösung s^* gewählt wird. Aussage iii. sichert die lokale quadratische Konvergenz der Startwerte $s_k \rightarrow s^*$ des Newton-Verfahrens auf Grund des lokalen Konvergenzssatzes bei Vogt (2010).

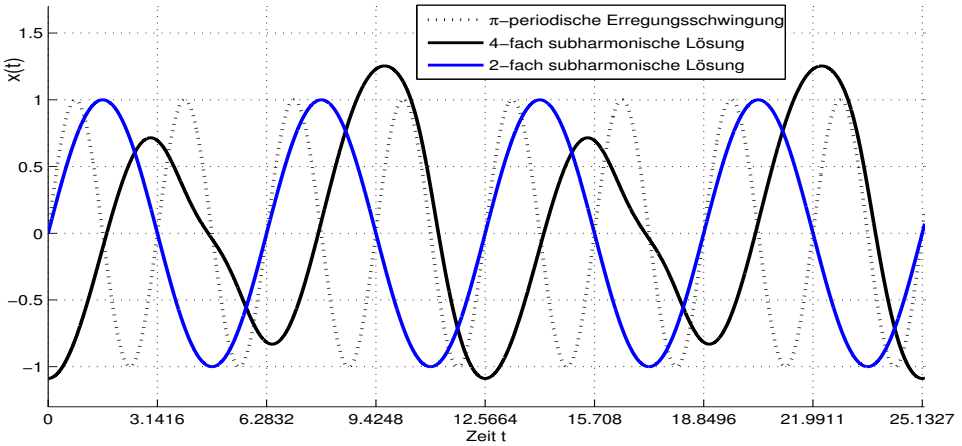


Abb. 2 System (18) – Erregungsschwingung sowie 2-fach und 4-fach subharmonische Systemantworten

Beispiel 9

Das folgende 2-fach subharmonisch reagierende System beschreibt ein elektrisches Netzwerk, das bei harmonischer Erregung als Systemantwort eine subharmonische Schwingung erzeugt. Die Modellgleichung von E. Philippow und W. Büntig (vgl. Philippow und Büntig (1992)) lautet

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x} + 2bx\dot{x} + x = \hat{B} \sin 2t$$

mit den reellen Parametern $b = \hat{B} = 1$ sowie dem freien Parameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Transformation in ein System erster Ordnung liefert das nichtautonome Schwingungsproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) - x_1(T) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2 - 2bx_1x_2 - x_1 + \hat{B} \sin 2t, & x_2(0) - x_2(T) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

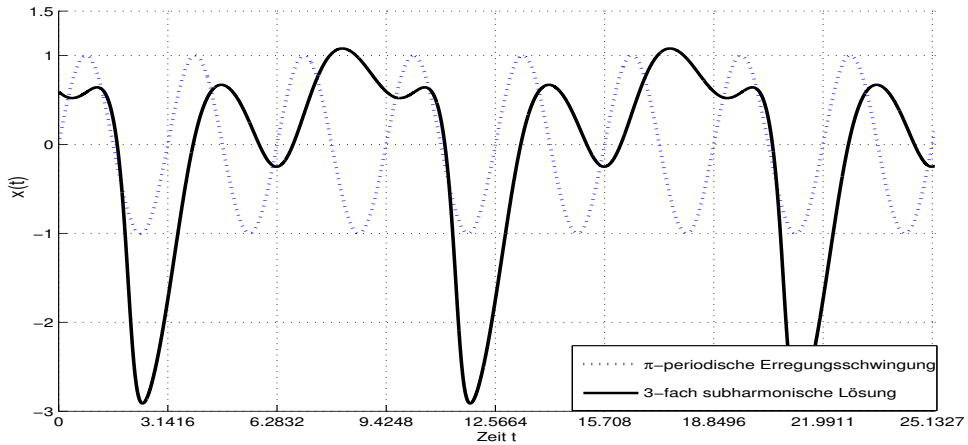


Abb. 3 System (18) – Erregungsschwingung sowie 3-fach subharmonische Systemantwort

mit Erregungsperiode $T_0 = \pi$ und vorgegebener Lösungsperiode $T = 2\pi$. Untersucht man das Lösungsverhalten für den festen Parameterwert $\varepsilon_0 = 0.4$, so findet man mit Algorithmus 6 leicht einen periodischen Orbit der gewünschten Periodendauer 2π . Darüber

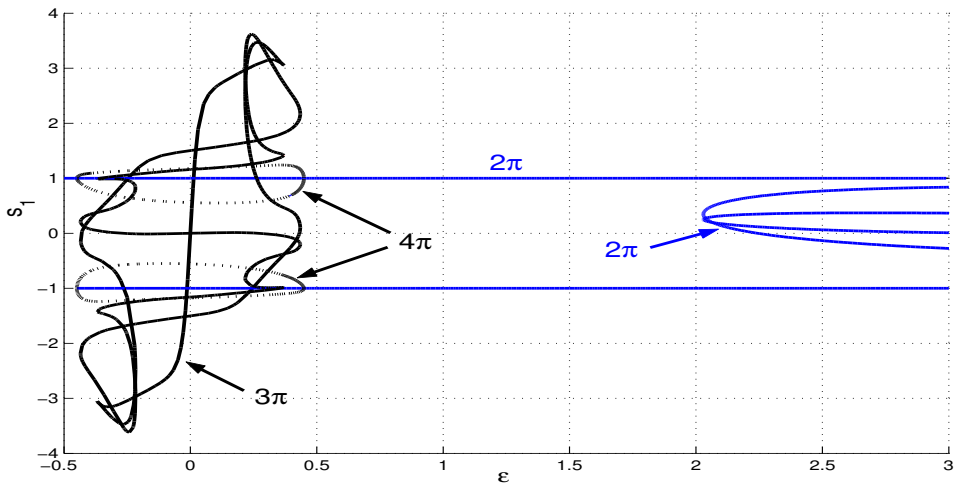


Abb. 4 (ε, s_1) -Diagramm der periodischen Lösungen des Systems (18)

hinaus existieren aber auch 3-fach bzw. 4-fach subharmonische Lösungen. Die Abbildungen 2 und 3 zeigen diese Schwingungen. Betrachten wir die 3π -periodische Lösung, deren Anfangswert $s_1 = x_1(0)$ in Abhängigkeit vom Parameter ε in Abbildung 4 durch eine geschlossene schwarze Kurve dargestellt ist. Der Versuch einer Lösungsfortsetzung nach dem Kontrollparameter ε , ausgehend von $\varepsilon = 0.36$ und dem Startpunkt $s_0 = x(0) = (0.38697629, 0.09266292)^T$, scheitert mit dem Schießverfahren schon nach wenigen Fortsetzungsschritten. Grund hierfür ist offenbar ein „stark instabiles“ Verhalten

der periodischen Lösungen, das zum Versagen jedes numerischen Integrationsverfahrens bereits vor Erreichen des Intervallendes $T = 3\pi$ führt. ■

2.2 Stabilitätsanalyse

Betrachten wir Lösungen des soeben behandelten subharmonisch reagierenden Netzwerkes mit Parametern $b = 1$, $\varepsilon = 3$ und $\hat{B} = 2$ in der Umgebung zweier periodischer Lösungen Γ_1 und Γ_2 , so stellen wir unterschiedliches Verhalten fest:

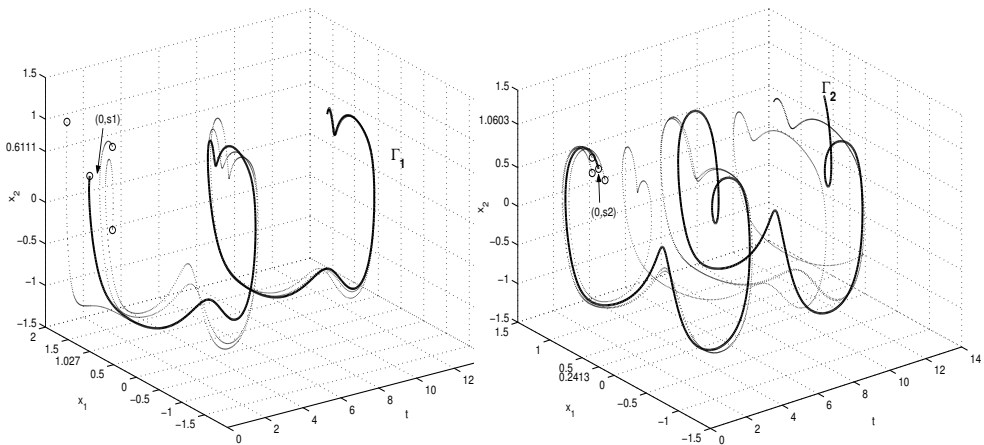


Abb. 5 Lösungen in der Umgebung der stabilen Lösung Γ_1 (links) und der instabilen Lösung Γ_2 (rechts)

Während die Lösung Γ_1 im erweiterten Phasenraum \mathbb{R}^3 nahe gelegene Lösungen „anzieht“, wirkt Γ_2 „abstoßend“ (vgl. Abb. 5). Wir wenden deshalb den Begriff der Ljapunov-Stabilität (vgl. Hoffmann et al. (2006)) nun auf periodische Orbits an:

Definition 10 (Ljapunov-Stabilität periodischer Orbits)

- i. $\{\varphi_t(s^*)\}$, $t \geq 0$, heißt (Ljapunov-)stabil, wenn zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $s \in D$ mit $\|s - s^*\| < \delta$ stets $\|\varphi_t(s) - \varphi_t(s^*)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$ gilt.
- ii. Ist $\{\varphi_t(s^*)\}$ (Ljapunov-)stabil und es existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $s \in D$ mit $\|s - s^*\| < \delta_1$ stets $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(s) - \varphi_t(s^*)\| = 0$ folgt, so ist $\{\varphi_t(s^*)\}$ asymptotisch (Ljapunov-)stabil.
- iii. Ist $\{\varphi_t(s^*)\}$ nicht (Ljapunov-)stabil, so heißt es (Ljapunov-)instabil.

Auch für periodische Orbits soll nun ein algebraisches Stabilitätskriterium entwickelt werden. Voraussetzung 3 sei erfüllt und die Folge der Anfangsvektoren $\{s_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, in Algorithmus 6 konvergiere gegen eine Nullstelle s^* von $g(s) := x(T, s) - s$. Wegen

(8) ist dann mit $x(0, s^*) = s^*$ die Funktion $x(t, s^*)$ eine gesuchte T -periodische Lösung. Wir betrachten dazu eine benachbarte Lösung $x(t, s)$ des AWP

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0, s) = s, \quad s \in \mathcal{K}[s^*; \varrho] \quad (19)$$

mit der nach Satz 8 garantierten Umgebung $\mathcal{K}[s^*; \varrho]$. Für die Differenzfunktion $z(t) := x(t, s) - x(t, s^*)$ gewinnen wir durch Taylor-Entwicklung

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t, s) - \dot{x}(t, s^*) = f(x(t, s), t) - f(x(t, s^*), t) = \underbrace{D_x f(x(t, s^*), t)}_{A(t, s^*)} \cdot z(t) + \mathcal{O}(\|z(t)\|^2),$$

so dass diese Funktion in 1. Näherung für $\|z(t)\| \ll 1$ dem Variationssystem

$$\dot{z} = A(t, s^*)z, \quad z(0) = z^0 = s - s^* \quad (20)$$

genügt. Die zugehörige Jacobi-Matrix $A(t, s^*) = D_x f(x(t, s^*), t)$ ist T -periodisch in t . Denn

$$\begin{aligned} A(t+T, s^*) &= D_x f(x(t+T, s^*), t+T) \\ &= D_x f(x(t, s^*), t+T), \quad \text{da } x(t, s^*) \text{ periodisch ist} \\ &= D_x f(x(t, s^*), t) = A(t, s^*) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung 3 auch $D_x f(x, t)$ periodisch in t ist. Die Fundamentalmatrix $X(t, s^*)$ ist mit $X(0, s^*) = I$ nach dem Satz von Liouville regulär für alle $t \in \mathbb{R}$. Deshalb bilden ihre Spaltenvektoren eine Basis, womit sich die Störungsfunktion $z(t)$ als deren Linearkombination

$$\begin{aligned} z(t) &= X(t, s^*)c, \quad c \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad z(0) = X(0, s^*)c = c = z^0 \\ &= X(t, s^*)z^0 = X(t, s^*)(s - s^*) \end{aligned} \quad (21)$$

darstellen lässt. Damit ist das Verhalten der mit $s = s^*$ gebildete Matrixfunktion $X(t, s^*)$, die auch *Hauptlösungsmatrix* genannt wird, für $t \rightarrow \infty$ maßgeblich. Die *Floquet-Theorie* liefert eine interessante Darstellung für diese Funktion. In Pontrjagin (1965) findet man den vollständigen Beweis des Satzes von Floquet:¹

Satz 11 (Floquet)

Wenn $A(t, s^*)$ eine stetige T -periodische Matrixfunktion ist, so kann die Hauptlösungsmatrix $X(t, s^*)$ in der Floquet-Darstellung

$$X(t, s^*) = G(t) \cdot e^{tR}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (22)$$

notiert werden. Dabei ist $G(t)$ eine reguläre stetig differenzierbare T -periodische Matrixfunktion und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine konstante Matrix.

¹Gaston Floquet (1847–1920), französischer Mathematiker, Arbeiten zur Theorie gewöhnlicher Differenzialgleichungen.

Für $t = 0$ ergibt (22) die Einheitsmatrix $G(0) = I$, während die T -Periodizität von $G(t)$ die konstante Matrix $M = X(T, s^*) = G(T) \cdot e^{TR} = e^{TR}$ liefert:

Definition 12 (Monodromiematrix, Floquet-Multiplikatoren)

Die bei $t = T$ gebildete konstante $n \times n$ -Matrix

$$M := X(T, s^*) = \left. \frac{\partial x}{\partial s}(t, s) \right|_{t=T, s=s^*} = e^{TR} \quad (23)$$

heißt *Monodromiematrix*. Ihre Eigenwerte m_i , $i = 1(1)n$, sind die *Floquet-Multiplikatoren* (auch: *charakteristische Multiplikatoren*) von $x(t, s^*)$.

Worin liegt nun die Bedeutung dieser Matrix? Wegen der T -Periodizität von $G(t)$ erhält man sofort

$$X(t + T, s^*) = G(t + T)e^{(t+T)R} = G(t)e^{tR}e^{TR} = X(t, s^*) \cdot M \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ersetzt man t durch $t + T$, so ergibt sich wiederum

$$X(t + 2T, s^*) = X(t + T, s^*) \cdot M = X(t, s^*) \cdot M^2,$$

woraus induktiv

$$X(t + kT, s^*) = X(t, s^*) \cdot M^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{und} \quad X(kT, s^*) = M^k \quad (24)$$

folgt. Die Monodromiematrix zur k -fachen Periode $T_k = k \cdot T$ ist also gleich der k -ten Potenz der Monodromiematrix M . Die Störungsfunktion (21) erhält damit die Form

$$z(t + kT) = X(t + kT, s^*) \cdot (s - s^*) = X(t, s^*) M^k (s - s^*) \quad (25)$$

bzw. mit $t = 0$

$$z(kT) = M^k (s - s^*), \quad k = 0, 1, \dots \quad (26)$$

$z(kT)$ entsteht also durch eine Vektoriteration mit M , angewandt auf die Anfangsstörung $s - s^*$. Falls $t \neq 0$ in Formel (25) ist, so erfolgt eine nachträgliche Korrektur von $z(kT)$ mittels der Matrix $X(t, s^*)$. Über das Verhalten von $z(kT)$ für $k \rightarrow \infty$ entscheiden wie bei der allgemeinen Vektoriteration $z_k = M z_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, zur Approximation von Eigenwerten einer Matrix M (vgl. dazu Hoffmann et al. (2005), Kapitel 20), die betragsgrößten Eigenwerte von M . Es gilt

Lemma 13

Unter der Voraussetzung 3 seien m_i die Floquet-Multiplikatoren zu $x(t, s^*)$.

- i. Ist $|m_i| \neq 1$ für alle $i = 1(1)n$, so heißt $x(t, s^*)$ *hyperbolisch*.
- ii. Ist $|m_i| < 1$ für alle $i = 1(1)n$, so ist $x(t, s^*)$ *asymptotisch Ljapunov-stabil*.
- iii. Ist $|m_i| > 1$ für ein i , so ist $x(t, s^*)$ *Ljapunov-instabil*.

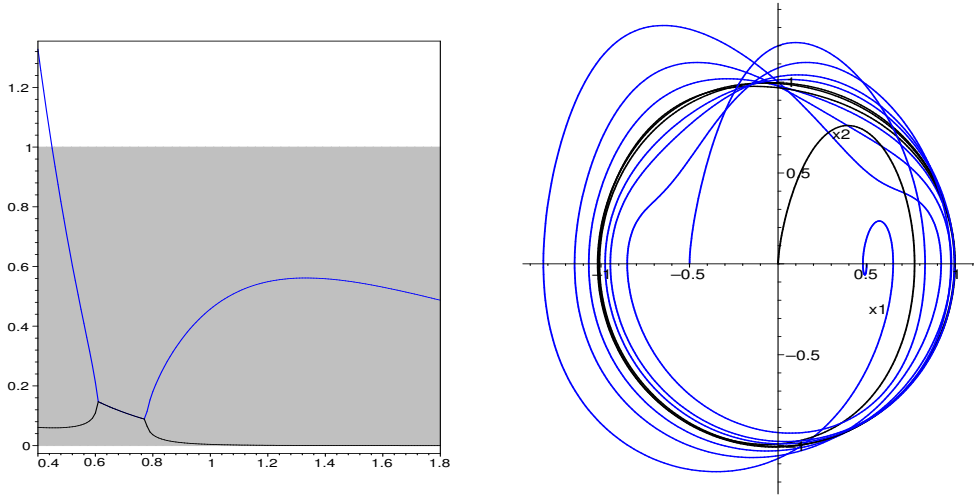


Abb. 6 Floquet-Multiplikatoren (links) und Phasenkurven (rechts) zu Beispiel 14

Beispiel 14

Das subharmonisch reagierende System aus Beispiel 4 mit $b = \hat{B} = 1$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) - x_1(T) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2 - 2bx_1x_2 - x_1 + \hat{B} \sin 2t, & x_2(0) - x_2(T) &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

besitzt für jeden reellen Parameterwert ε die Lösung $x_1(t, s^*) = \sin t$, $x_2(t, s^*) = \cos t$. Durch partielle Ableitung und Einsetzen der Lösung mit $s^* = (0, 1)^T$ berechnen wir die Jacobi-Matrix

$$A(t, s^*) = D_x f(x(t, s^*), t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\varepsilon \sin t \cos t - 2 \cos t - 1 & -2\varepsilon \cos^2 t - 2 \sin t \end{pmatrix}$$

und gewinnen so das Variationssystem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = A(t, s^*) \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{11}(0) & x_{12}(0) \\ x_{21}(0) & x_{22}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

das allerdings nicht analytisch lösbar ist. Numerisch erhalten wir zum Parameterwert $\varepsilon = 1.4$ mittels eines Runge-Kutta-Verfahrens – die Werte wurden mit dem Standardverfahren *dsolve* von MAPLE mit Genauigkeit von 10^{-7} ermittelt – die Hauptlösungsmatrix $X(t, s^*)$, womit sich bei $t = 2\pi$ die Monodromiematrix

$$M = X(2\pi, s^*) = \begin{pmatrix} 0.526710116094 & -0.0733313105237 \\ -0.232313402738 & 0.0326311502789 \end{pmatrix}$$

ergibt. Die Floquet-Multiplikatoren berechnen wir anschließend zu $m_1 = 0.5590706$ und $m_2 = 0.0002706468$, womit Satz 13 die asymptotische Stabilität der Lösung garantiert. In Abbildung 6 (rechts) ist das Konvergenzverhalten dreier Phasenkurven gegen die Lösung $x(t, s^*) = (\sin t, \cos t)$ dargestellt.

Wiederholung dieser Rechnung für weitere Parameterwerte $\varepsilon \in [0.4, 1.8]$ liefert ein interessantes Stabilitätsverhalten dieser Lösung. In Abbildung 6 (links) sind die Absolutbeträge $|m_1|$ (blau) und $|m_2|$ (schwarz) der Floquet-Multiplikatoren dargestellt. Offenbar ist die Lösung für $\varepsilon < 0.45$ instabil und ansonsten asymptotisch stabil. Im Intervall $[0.6, 0.8]$ werden die Multiplikatoren konjugiert komplex, womit aber kein Stabilitätsverlust verbunden ist. Mit der genauen Bestimmung des kritischen Parameterwertes $\varepsilon_0 \approx 0.45$ werden wir uns in Abschnitt 5.3 beschäftigen. ■

Mittels der Floquet-Multiplikatoren lässt sich die *Regularität einer periodischen Lösung* $x(t, s^*)$ wesentlich leichter nachweisen als mit der unhandlichen Definition 7. Denn mit der Defektfunktion $g(s) := x(T, s) - s$ lautet die Newton-Matrix $g'(s) = X(T, s) - I_n$ des Schießverfahrens (6) bzw. an der Lösungsstelle $s = s^*$

$$g'(s^*) = X(T, s^*) - I_n = M - I_n. \quad (28)$$

Damit zeigt man leicht das folgende algebraische Regularitäts-Kriterium:

Lemma 15

Neben Voraussetzung 3 mit $f \in \mathcal{C}^2(I \times D)$ seien alle n Floquet-Multiplikatoren m_i von $x(t, s^)$ verschieden von 1. Dann ist $s^* = x(0, s^*)$ eine reguläre Lösung von $g(s) = 0$, und das Newton-Verfahren konvergiert lokal quadratisch gegen s^* .*

Beweis: Wegen (28) besitzt $g'(s^*)$ die Eigenwerte $\mu_1 = m_1 - 1, \mu_2 = m_2 - 1, \dots, \mu_n = m_n - 1$. Da $m_i \neq 1$ gilt, sind alle Eigenwerte von $g'(s^*)$ ungleich 0. Somit ist $g'(s^*)$ eine reguläre Matrix und s^* eine reguläre Lösung von $g(s) = 0$. Mit dem allgemeinen Konvergenzsatz über das Newton-Verfahren folgt die Konvergenzbehauptung. □

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s^*$ gemäß Lemma liefert das Newton-Verfahren nach K Schritten in der Regel eine gute Näherung $g'(s_K) \approx g'(s^*)$, so dass die Monodromiematrix

$$M = g'(s^*) + I_n \approx g'(s_K) + I_n \quad (29)$$

mit beliebig hoher Genauigkeit approximiert werden kann.

Häufig steht die Jacobi-Matrix $D_x f(x, t)$ jedoch nicht explizit zur Verfügung. Dann vermeiden wir das Variationssystem vollkommen und ersetzen $g'(s_k)$ durch geeignete Differenzenquotienten, indem der Startwert s_k des k -ten Newtonschrittes mittels eines Vektors $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^T$, $\delta_j > 0$, „gestört“ wird. Mit den j -ten Einheitsvektoren e_j definieren wir die gestörten Startvektoren

$$\sigma_0 := s_k, \quad \sigma_j := s_k + \delta_j \cdot e_j, \quad j = 1(1)n. \quad (30)$$

Die Schritte 1.1 und 1.2 von Algorithmus 6 verändern sich damit und liefern das praktikable Schießverfahren 16 ohne Nutzung des Variationssystems. Eine erprobte Strategie wählt zu $s_k = (s_{k1}, s_{k2}, \dots, s_{kn})^T$ die Schrittweiten im k -ten Iterationsschritt zu

$$\delta_j = \sqrt{\varepsilon_M}(1 + |s_{kj}|), \quad j = 1(1)n, \quad \text{mit Maschinengenauigkeit } \varepsilon_M.$$

ALGORITHMUS 16 (Schießverfahren ohne Variationssystem)Function $[s^*, m] = \text{approximate_shooting}(f, T, s_0, \text{tol}, kmax)$ 1. Für $k = 0, 1, \dots, kmax$ iteriere:1.1. Wähle $\delta_j = \sqrt{\varepsilon_M}(1 + |s_{kj}|)$, $j = 1(1)n$.1.2. (Anfangswertprobleme) Löse mit $\sigma_0 := s_k$ und $\sigma_j := s_k + \delta_j \cdot e_j$, $j = 1(1)n$, die $n + 1$ Systeme für $t \in [0, T]$:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0, \sigma_j) = \sigma_j, \quad j = 0(1)n.$$

Ergebnis: $x(T, \sigma_j) \in \mathbb{R}^n$, $j = 0(1)n$

1.3. (Nullstellenaufgabe) Bilde die Funktionen

$$g(\sigma_j) := x(T, \sigma_j) - \sigma_j, \quad j = 0(1)n \quad \text{und damit}$$

$$g(s_k) := g(\sigma_0) \quad \text{sowie die Differenzenquotienten}$$

$$g_j := \frac{1}{\delta_j} [g(\sigma_j) - g(\sigma_0)], \quad j = 1(1)n,$$

$$g'(s_k) := (g_1, g_2, \dots, g_n).$$

1.4. (Newton-Schritt) Löse das lineare System

$$g'(s_k) \cdot d_k = -g(s_k).$$

1.5. Falls $\|d_k\| < \text{tol} \cdot (1 + \|g(s_k)\|)$, so gehe zu Schritt 2.1.6. (Newton-Korrektur) Aktualisiere $s_{k+1} := s_k + d_k$.2. (Periodische Lösung) Setze $s^* := s_k$ und löse das AWP

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(0) = s^*, \quad t \in [0, T].$$

3. (Monodromiematrix) Setze $M := g'(s_k) + I_n$ und bestimme die Eigenwerte $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$.4. Return s^*, m

Anders als der Lösungsvektor s^* werden jetzt die Monodromiematrix M und somit die Floquet-Multiplikatoren nur mit einer maximalen Genauigkeit von $\sqrt{\varepsilon_M}$ approximiert.

2.3 Mehrfach-Schießverfahren

Die Durchführbarkeit der einfachen Schießverfahren 6 und 16 ist oft nur in unmittelbarer Lösungsnähe gesichert, denn die darin vorkommenden AWP müssen auf dem gesamten Periodizitätsintervall $I = [0, T]$ lösbar sein. Der Konvergenzbereich des Schießverfahrens kann deshalb bei großer Lipschitz-Konstante L und langem Intervall I wegen der Konstanten $\varrho = re^{-LT}$ aus Satz 8 extrem klein werden. Im *Mehrfach-Schießverfahren*

(Mehrzelmethode, multiple shooting, parallel shooting) versuchen wir, diesem Problem mit einer Segmentierung des Lösungsintervalls zu begegnen. In $I = [0, T]$ legen wir so genannte Schießpunkte t_k mit der Eigenschaft

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$$

fest, die auf $m \geq 1$ Teilintervalle $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ führen. $x(t) = x(t; t_k, s_k)$ bezeichne die auf dem k -ten Intervall I_k definierte Lösung des AWP

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_k) = s_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = 0(1)m - 1. \quad (31)$$

Abbildung 7 zeigt derartige Lösungen zu vorgegebenen Anfangswerten s_k . An den inne-

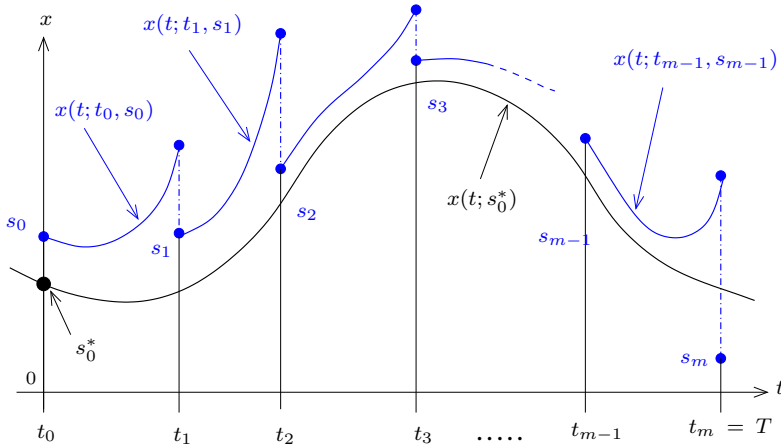


Abb. 7 Stückweise Lösung mit der Mehrzielmethode

ren Schießpunkten ergeben sich $m - 1$ Stetigkeitsbedingungen (Matching-Bedingungen) an die gesuchte Lösung mit den unbekannten „Schießwerten“ s_0, s_1, \dots, s_{m-1} , ergänzt um die Periodizitätsbedingungen zu

$$\begin{aligned} x(t_k; t_{k-1}, s_{k-1}) &= s_k, & k = 1(1)m - 1, \\ x(t_m; t_{m-1}, s_{m-1}) &= s_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Das daraus entstehende große Gleichungssystem für die $n \cdot m$ unbekannten Zahlenwerte $s = (s_0, s_1, \dots, s_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ erhält dann folgende Struktur:

$$F(s) := \begin{pmatrix} F_0(s_0, s_1) \\ F_1(s_1, s_2) \\ \vdots \\ F_{m-2}(s_{m-2}, s_{m-1}) \\ F_{m-1}(s_{m-1}, s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_1; t_0, s_0) - s_1 \\ x(t_2; t_1, s_1) - s_2 \\ \vdots \\ x(t_{m-1}; t_{m-2}, s_{m-2}) - s_{m-1} \\ x(t_m; t_{m-1}, s_{m-1}) - s_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (33)$$

Das Einfach-Schießverfahren entspricht genau dem Sonderfall $m = 1$. Die theoretischen Grundlagen des Mehrfach-Schießverfahrens findet man dargestellt in den Monografien von Hermann (2004) und Keller (1976). Wir fassen die Aussagen zusammen in

Satz 17

Die (hinreichend glatte) Lösung $x^*(t)$ nach Voraussetzung 3 sei regulär. Mit $s^* = (s_0^*, s_1^*, \dots, s_{m-1}^*)^T$ gilt:

- i. s^* ist Lösung von $F(s) = 0$ genau dann, wenn $x^*(t) = x(t; t_k, s_k^*)$, $k = 0(1)m-1$, Lösung des Randwertproblems (7) ist.
- ii. Eine Lösung s^* des Gleichungssystems (33) ist genau dann regulär, wenn die Lösung $x^*(t)$ des Randwertproblems (7) regulär ist.
- iii. Gleichung (33) kann mit dem Newton-Verfahren gelöst werden, das Q-quadratisch konvergiert, falls die Startnäherung $s^{(0)} = (s_0^{(0)}, s_1^{(0)}, \dots, s_{m-1}^{(0)})^T$ hinreichend nahe bei s^* liegt.

Um das großdimensionale System $F(s) = 0$ zu lösen, wenden wir das Newton-Verfahren

$$s^{(\nu+1)} = s^{(\nu)} - F'(s^{(\nu)})^{-1} F(s^{(\nu)}), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

auf F an. Darin bezeichnet $s^{(\nu)}$ die ν -te Newton-Näherung, wogegen s_k die k -te Komponente von s ist. Die Jacobi-Matrix hat wegen (33) die zyklisch bidiagonale Blockstruktur

$$F'(s) = \begin{pmatrix} G_0 & -I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_1 & -I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{m-2} & -I_n \\ -I_n & 0 & \cdots & 0 & G_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad G_k := \frac{\partial x}{\partial s_k}(t_{k+1}; t_k, s_k),$$

wobei $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Die $n \times n$ -Matrizen G_k können wir wie beim Einfach-Schießen durch Integration des Variationssystems auf dem Intervall $I_k = [t_k, t_{k+1}]$

$$\dot{X} = A(t; t_k, s_k)X, \quad X(t_k; t_k, s_k) = I_n, \quad k = 0(1)m-1 \quad (35)$$

bestimmen. Die zugehörigen Jacobi-Matrizen A und die Matrizen G_k sind durch

$$A(t; t_k, s_k) := D_x f(x(t; t_k, s_k), t) \quad \text{und} \quad G_k = X(t_{k+1}; t_k, s_k) = \frac{\partial x}{\partial s_k}(t_{k+1}; t_k, s_k)$$

definiert. Mit diesen Erweiterungen lässt sich aus den Grundalgorithmen 6 und 16 das *Mehrfach-Schießverfahren* 18 konstruieren. Was ist bei dessen Anwendung zu beachten?

ALGORITHMUS 18 (Mehrfach-Schießverfahren)

Function $[s^*, \mu] = \text{multiple_shooting}(f, D_x f, T, s_0, m, tol, \nu max)$

1. Wähle die Schießpunkte $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_m = T$ und Startnäherungen $s = (s_0, s_1, \dots, s_{m-1})^T$.
2. Für $\nu = 0(1)\nu max$ iteriere:
 - 2.1. (Anfangswertprobleme) Für $k = 0(1)m - 1$ wiederhole:

Löse auf $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ die $n + 1$ Systeme (31) und (35).
 Ergebnisse: $x(t_{k+1}; t_k, s_k) \in \mathbb{R}^n$, $G_k := X(t_{k+1}; t_k, s_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 - 2.2. (Nullstellenaufgabe)

Bilde den Vektor $F(s)$ nach (33) und die Matrix $F'(s)$.
 - 2.3. (Newton-Schritt) Löse das lineare System

$$F'(s) \cdot d = -F(s).$$
 - 2.4. Falls $\|d\| < tol \cdot (1 + \|F(s)\|)$, so gehe zu Schritt 3.
 - 2.5. (Newton-Korrektur) Aktualisiere $s := s + d$.
3. (Lösung) Setze $s^* := s$ und löse die m AWP

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_k) = s_k, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k = 0(1)m - 1.$$
4. (Monodromiematrix) Setze $M := G_{m-1} \cdot G_{m-2} \cdots G_1 \cdot G_0$ und bestimme die Eigenwerte $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$.
5. Return s^*, μ

1. Zu gegebener Startnäherung $s_0 \in \mathbb{R}^n$ und Toleranz tol müssen die Schießpunkte t_k und zugehörigen Anfangswerte s_k so gewählt werden, dass die AWP des Schrittes 2.1 in den Intervallen $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ eindeutig lösbar sind. Satz 8 garantiert dies für alle $s_k \in \mathcal{S}[s_k^*, \varrho_k]$ mit den Radien

$$\varrho_k := r e^{-L_k(t_{k+1}-t_k)} \quad \text{und Lipschitz-Konstanten} \quad L_k := \sup_{I_k \times D} |D_x f(t, x)|.$$

Die Durchführbarkeit des Mehrfach-Schießverfahrens ist somit bei hinreichend feiner Zerlegung von I theoretisch gesichert.

2. Problematisch bleibt die Bestimmung einer Startlösung s_0 und der Schießpunkte t_k . Mittels geeigneter Parameterfortsetzung (vgl. dazu Vogt (2010)) lassen sich in komplizierten Anwendungen die Schießpunkte schrittweise anpassen. Da der arithmetische Aufwand mit zunehmender Gitterfeinheit rasch ansteigt, sollten möglichst wenige Schießpunkte verwendet werden. Algorithmusschritt 2.1 zeigt übrigens, dass der numerische Integrationsaufwand gegenüber dem Einfach-Schießverfahren nicht zunimmt. Der Mehraufwand resultiert lediglich aus den entstehenden größeren linearen Gleichungssystemen. Diese

sollten mittels LU-Zerlegung mit Pivotisierung gelöst werden, wobei die schwache (sparse) Besetzungsstruktur der Jacobi-Matrix bei der Speicherung zu berücksichtigen ist.

3. Mit der ermittelten Lösung $s^* = (s_0^*, s_1^*, \dots, s_m^*)^T$ und zugehörigem Lösungsvektor $x^*(t) := x(t; t_k, s_k^*)$, $t \in I_k$, $k = 0(1)m - 1$, ergeben sich die Hauptlösungsmatrizen $X(t; t_k, s_k^*)$, $k = 0(1)m - 1$, in den m Teilintervallen I_k . Man überlegt sich leicht, dass für beliebiges $t \geq t_k$ die Hauptlösungsmatrix die Produktdarstellung

$$X(t; t_0, s_0^*) = X(t; t_k, s_k^*) \cdot X(t_k; t_{k-1}, s_{k-1}^*) \cdots X(t_2; t_1, s_1^*) \cdot X(t_1; t_0, s_0^*)$$

besitzt. Für die gesuchte Monodromiematrix $M = X(T; 0, s_0^*)$ erhalten wir folglich:

$$M = G_{m-1}^* G_{m-2}^* \cdots G_1^* G_0^* \quad \text{mit} \quad G_k^* := X(t_{k+1}; t_k, s_k^*). \quad (36)$$

In Algorithmus 18 wird das Variationssystem zur genauen Berechnung der Floquet-Multiplikatoren benutzt. Die Variante mittels Differenzenapproximation aus Algorithmus 16 dürfte jedoch insgesamt einfacher umzusetzen sein.

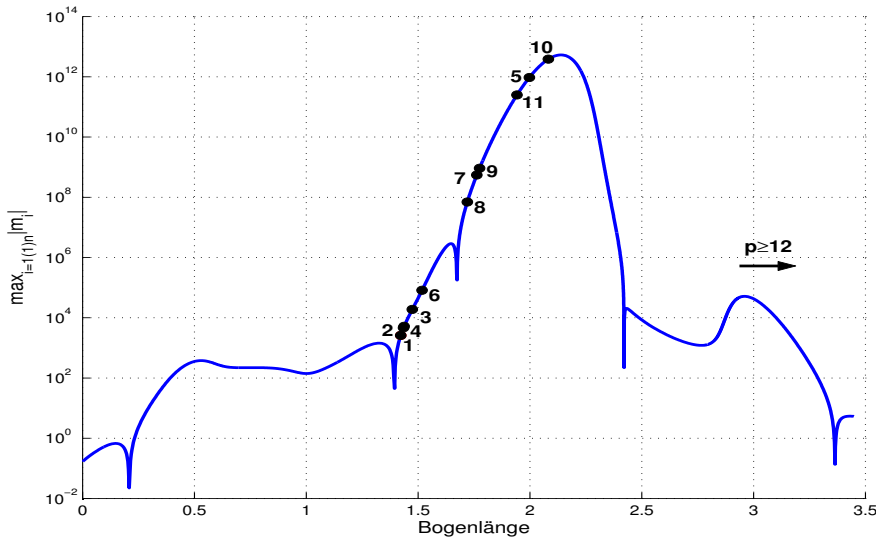


Abb. 8 Betragsgrößer Multiplikator in Abhängigkeit von der Bogenlänge

Beispiel 19

Kommen wir auf das subharmonisch reagierende System aus Beispiel 9 mit 3π -periodischer Lösung zurück. Abbildung 4 zeigt die 1. Komponente s_1^* dieser Lösung in Abhängigkeit vom Parameter ε , die durch eine geschlossene schwarze Kurve dargestellt ist. Beginnend mit $\varepsilon = 0.36$ und einem Startpunkt $s_0 = x(0) = (0.38697629, 0.09266292)^T$ versagen die Einfach-Schießverfahren 6 bzw. 16 schon nach wenigen Fortsetzungsschritten für ε mit einem Floquet-Multiplikator der Größenordnung 10^4 . Abbildung 8 stellt die maximalen Multiplikatoren der Lösungskurve in Abhängigkeit von deren Bogenlänge logarithmisch skaliert dar. Setzen wir das Mehrfach-Schießverfahren 18 mit m äquidistant

gewählten Schießpunkten $t_k = kT/m$ ein, so gelingt die Fortsetzung der Lösungskurve auch bei „starker“ Instabilität. In Abbildung 8 sind die Abbruchpunkte der Fortsetzung mit der Anzahl m gekennzeichnet. Erst mit 12 Schießpunkten wird die Fortsetzung in diesem stark instabilen Bereich mit $\max_{i=1(1)n} |m_i| \approx 10^{13}$ gemeistert! Auffällig ist, dass man mit nur fünf Schießpunkten die Instabilität beinahe überwindet, aber erst die Verwendung der doppelten Anzahl besser abzuschneiden vermag. Eine automatische Schießpunktanpassung der Lösungsfortsetzung im instabilen Bereich ist deshalb ratsam. ■

Bemerkung 20

Umfangreichere Darstellungen zu diesen und weiteren Verfahrensklassen, wie Finite-Differenzenverfahren und Kollokationsverfahren, findet man in der Spezialliteratur Ascher et al. (1995), Ascher und Petzold (1998), Hermann (2004). Hat man eine gute Lösungs-näherung $s_k^* \approx x^*(t_k)$, $k = 0(1)m - 1$, auf einem hinreichend feinem Gitter $\{t_k\}$ mit einem dieser Verfahren ermittelt, so lässt sich die Monodromiematrix M stets mittels der Darstellung (36)

$$M = G_{m-1}^* G_{m-2}^* \cdots G_1^* G_0^* \quad \text{mit} \quad G_k^* := X(t_{k+1}; t_k, s_k^*)$$

bestimmen. Dazu sind auf den Teilintervallen I_k die Hauptlösungsmatrizen $X(t_{k+1}; t_k, s_k^*)$ durch Integration von (35) zu berechnen. ■

3 Autonome Systeme

Die numerische Berechnung periodischer Lösungen autonomer DGL-Systeme

$$\dot{x} = f(x), \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad D \text{ offen}, \quad (37)$$

ist wegen der häufig unbekannten Lösungsperiode T^* komplizierter als im gerade behandelten periodisch erregten Fall. Wir treffen für diese Problemklasse folgende grundlegende

Voraussetzung 21 (Glattheit und Lösungsexistenz)

- i. $f \in C^r(D)$, $r \geq 2$.
- ii. System (37) besitzt einen Grenzykel $x^*(t)$ der Periode $T^* > 0$, der keine Gleichgewichtslage ist.

3.1 Einfaches Schießverfahren

Anders als im periodisch erregten Fall des vorhergehenden Abschnittes sind nun eine T -periodische Lösung $x \in C^1(D)$ und ihre Periodendauer $T > 0$ gesucht, die auf dem Intervall $I = [0, T]$ dem Zweipunkt-Randwertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(T) = x(0), \quad 0 < t < T, \quad (38)$$

genügen. Diese Aufgabe lässt sich mittels der Zeittransformation $t = \frac{T}{2\pi}\tau$ mit $\tau \in [0, 2\pi]$ wegen $\frac{dx}{d\tau} = \frac{T}{2\pi}\dot{x}(t) = \frac{T}{2\pi}f(x(\tau))$ auf das Einheitsintervall transformieren und in der Form

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{T}{2\pi}f(x), \quad x(2\pi) = x(0), \quad 0 < \tau < 2\pi \quad (39)$$

numerisch leichter bearbeiten, da die unbekannte Konstante T nun lediglich in der DGL auftritt. Wir wollen diese Darstellung erst im nächsten Abschnitt nutzen und vorerst bei der untransformierten Aufgabe (38) bleiben. Wegen der Translationsinvarianz der Lösung autonomer DGL kann jede Lösung $x(t; x_0) = \varphi_t(x_0)$, $t \in \mathbb{R}$, von (38) um eine beliebige reelle Phase t_0 verschoben werden.

Beispiel 22

Das autonome System in \mathbb{R}^2 mit reellen Parametern $\lambda > 0, \omega > 0$

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 - \omega x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = \omega x_1 + \lambda x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (40)$$

besitzt mit $x_0 = (\sqrt{\lambda}, 0)^T$ zu jedem $\lambda > 0, \omega > 0$ die T -periodische Lösung

$$\varphi_t(x_0) = \sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix},$$

die einen Grenzykel bildet. Offenbar ist mit jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ dann auch

$$\psi_t(x_0) = \varphi_{t+t_0}(x_0) = \sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} \cos \omega(t+t_0) \\ \sin \omega(t+t_0) \end{pmatrix}$$

T -periodische Lösung der Periode $T = 2\pi/\omega$. ■

Wir gehen vorerst wie im periodisch erregten Fall vor und transformieren das Randwertproblem (38) in eine Nullstellenaufgabe in \mathbb{R}^n . Zu vorgegebenen Parametern $s \in \mathbb{R}^n$ und $T > 0$ betrachten wir das AWP

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0; s, T) = s \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T]. \quad (41)$$

Nach Satz 8 existiert zu jedem (s, T) in einer Umgebung von (s^*, T^*) mit $s^* = x^*(0)$ eine eindeutige Lösung $x = x(t; s, T)$, $t \in [0, T]$ von (41). Definieren wir nun die Abbildung $g: D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow D$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$g(s, T) := x(T; s, T) - s \quad (42)$$

und betrachten die Nullstellenaufgabe

$$g(s, T) = 0. \quad (43)$$

Unter Voraussetzung 21 ist $x(t; s^*, T^*)$ genau dann eine periodische Lösung mit Periode T^* , wenn (s^*, T^*) dieses Gleichungssystem (43) löst. Wie im periodisch erregten Fall definieren wir zu einer Lösung $x(t; s, T)$ des AWP (41) das Variationssystem

$$\dot{X} = A(t; s, T)X, \quad X(0; s, T) = I_n \quad \text{mit} \quad A(t; s, T) := Df(x(t; s, T)). \quad (44)$$

Mit der Lösung (s^*, T^*) der Gleichung (43) und $x(t; s^*, T^*)$ erhalten wir daraus ebenfalls die Hauptlösungsmatrix und die Monodromiematrix

$$X(t; s^*, T^*) = \frac{\partial x}{\partial s}(t; s^*, T^*), \quad M = X(T^*; s^*, T^*) = \frac{\partial x}{\partial s}(T^*; s^*, T^*). \quad (45)$$

Lemma 23

Unter Voraussetzung 21 ist $m_1 = 1$ stets ein Eigenwert der Monodromiematrix M mit zugehörigem Eigenvektor $v(0) = \dot{x}(0; s^*, T^*) = f(s^*)$.

Beweis: Einsetzen der periodischen Lösung $x(t; s^*, T^*)$ und Differentiation nach t liefert

$$\frac{d}{dt} \dot{x}(t; s^*, T^*) = Df(x(t; s^*, T^*)) \cdot \frac{d}{dt} x(t; s^*, T^*) \quad \text{bzw.} \quad \dot{v} = A(t; s^*, T^*) \cdot v$$

mit der Jacobi-Matrix $A(t; s^*, T^*) := Df(x(t; s^*, T^*))$ und der Ableitung $v(t) := \dot{x}(t; s^*, T^*)$, d. h. v genügt dem Variationssystem. Die Hauptlösungsmatrix $X(t; s^*, T^*)$ bildet jedoch ein Fundamentalsystem von Lösungen, so dass $v(t)$ als Linearkombination ihrer (linear unabhängigen) Spaltenvektoren notiert werden kann:

$$v(t) = \dot{x}(t; s^*, T^*) = X(t; s^*, T^*) \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen $v(0) = X(0; s^*, T^*) \cdot c = c$ ergibt sich $v(T^*) = X(T^*; s^*, T^*) \cdot v(0) = M \cdot v(0)$, woraus wegen der T^* -Periodizität von $x(t; s^*, T^*)$ und damit auch von $v(t)$ die Eigenwertbeziehung

$$M \cdot v(0) = m_1 \cdot v(0) \quad \text{mit} \quad m_1 = 1$$

folgt. $v(0) = \dot{x}(0; s^*, T^*) = f(s^*) \neq 0$ ist Eigenvektor von M zu Eigenwert $m_1 = 1$, da $x(0; s^*, T^*) = s^*$ nach Voraussetzung kein Gleichgewicht darstellt. \square

Ist $m_1 = 1$ ein geometrisch einfacher Eigenwert der Monodromiematrix M , so bezeichnet man $x(t, s^*)$ als *reguläre Lösung*. Das trifft insbesondere auf *hyperbolische Lösungen* zu, für die $|m_i| \neq 1$ für $i = 2, 3, \dots, n$ gefordert wird.

Beispiel 24

Für das DGL-System (40) erhalten wir mit der dort angegebenen periodischen Lösung $x(t; s^*, T^*) = (\sqrt{\lambda} \cos \omega t, \sqrt{\lambda} \sin \omega t)^T$ die periodische Jacobi-Matrix

$$A(t; s^*, T^*) = Df(x(t; s^*, T^*)) = \begin{pmatrix} -2\lambda \cos^2 \omega t & -\omega - \lambda \sin 2\omega t \\ \omega - \lambda \sin 2\omega t & -2\lambda \sin^2 \omega t \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen in das Variationssystem, dass die Hauptlösungsmatrix die Form

$$X(t; s^*, T^*) = \begin{pmatrix} e^{-2\lambda t} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ e^{-2\lambda t} \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2\lambda t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

besitzt, also die Floquet-Gestalt $X(t; s^*, T^*) = G(t) \cdot e^{tR}$ mit den Matrizen

$$G(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Monodromiematrix $M = \text{diag}(e^{-4\lambda\pi/\omega}, 1)$ liefert die beiden Floquet-Multiplikatoren $m_1 = 1$, $m_2 = e^{-4\lambda\pi/\omega} \in (0, 1)$, womit die Lösung für alle Werte $\lambda > 0$ hyperbolisch ist. ■

3.2 Phasenbedingungen

Wenden wir uns nun der Lösung der Nullstellenaufgabe $g(s, T) = 0$ zu. Mit der partiellen Ableitung $D_s g(s, T)$ ist die Matrix $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$G := D_s g(s^*, T^*) = \frac{\partial x}{\partial s}(T^*; s^*, T^*) - I_n = M - I_n \quad (46)$$

an der gesuchten Lösung stets singulär, denn sie besitzt wegen des Floquet-Multiplikators $m_1 = 1$ stets den Eigenwert 0. Wäre also selbst T^* bekannt, so ist die Nullstelle s^* von $g(s, T^*) = 0$ nicht regulär. Eine Regularisierung kann jedoch durch Einführung einer zusätzlichen *Phasenbedingung* erreicht werden. Wir ergänzen dazu das unterbestimmte System $g(s, T) = 0$ mittels der Funktion $h : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch eine skalare Bedingung $h(s, T) = 0$, die die „Phase“ der Lösungsfunktion festlegt. Das erweiterte System

$$g(s, T) = 0, \quad h(s, T) = 0 \quad (47)$$

besitzt nunmehr $n + 1$ Gleichungen für die $n + 1$ Unbekannten $(s, T) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Die Wahl von h soll zudem sichern, dass die erweiterte Jacobi-Matrix $\frac{\partial(g, h)}{\partial(s, T)}$ am Lösungspunkt (s^*, T^*) regulär ist. Folgende Phasenbedingungen werden empfohlen:

1. Die *einfache Komponentenbedingung* von Kubíček und Marek (1983) legt die i -te Komponente von s durch

$$h(s, T) := s_i - \alpha \quad \text{für ein } i \in \{1, \dots, n\} \quad (48)$$

mit der Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ fest. Abbildung 9 zeigt, dass α im Variationsbereich der Lösungskomponente $x_i(t; s^*, T^*)$ liegen muss, weshalb die Auswahl von α und i problematisch sein kann. Wählen wir andererseits s^* so, dass $\dot{x}_i(0; s^*, T^*) = 0$ wird, so ergibt sich in Abbildung 9 die *Komponentenbedingung für die Ableitung* von Seydel (1991)

$$h(s, T) := f_i(s) \quad \text{für ein } i \in \{1, \dots, n\}, \quad (49)$$

bei der wiederum die Wahl des i entscheidend für die Verfahrenskonvergenz ist.

2. Bei der *Poincaré-Bedingung* aus Keller (1987), Kubíček und Marek (1983), Seydel (1991) wird ein nahe der Lösung liegender Startpunkt s_0 vorausgesetzt. Nutzt man eine

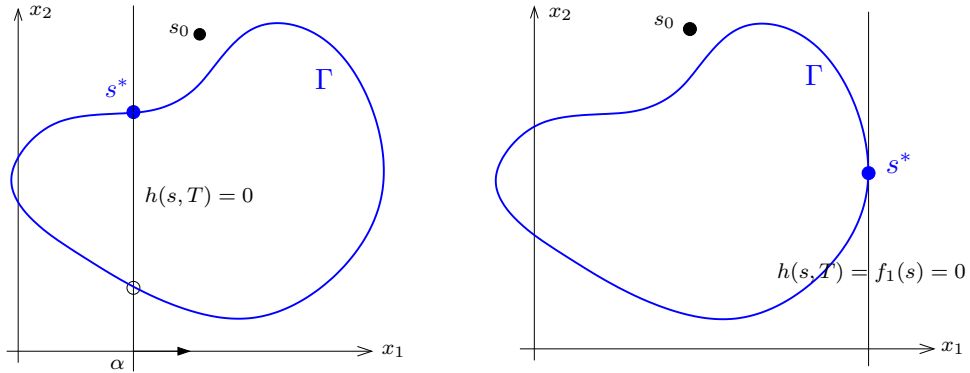


Abb. 9 Komponentenbedingung (links) und Ableitungsbedingung (rechts)

Parameterfortsetzung, so eignet sich dafür meist der betreffende Prädiktorwert (vgl. dazu Vogt (2010)). Mit dem Tangentenvektor $\dot{s}_0 = f(s_0)$ an das Vektorfeld – oder eine Näherung dafür – beschreibt

$$h(s, T) := f(s_0)^T \cdot (s - s_0) = 0 \quad (50)$$

in Abbildung 10 (links) anschaulich die Hyperebene durch s_0 mit Normalenvektor $f(s_0)$. Berechnen wir mit dem Newton-Verfahren die sukzessiven Näherungen s_1, s_2, \dots, s_k , so empfiehlt sich der jeweils aktuelle Wert s_{k-1} im k -ten Iterationsschritt als Startpunkt und liefert so die Bedingung von A. I. Mees (vgl. Parker und Chua (1989)) für s_k

$$h(s_k, T) := f(s_{k-1})^T \cdot (s_k - s_{k-1}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (51)$$

aus Abbildung 10 (rechts). Der Korrekturvektor jedes Iterationsschrittes wird also stets orthogonal zum Tangentenvektor an das Vektorfeld gefordert.

3. Berücksichtigen wir die zu $x(0; s_0, T_0) = s_0$ gehörende Lösung $x_0(t) = x(t; s_0, T_0)$ des AWP auf dem gesamten Periodizitätsintervall $[0, T]$, so lässt sich mit dem Skalarprodukt $\langle u, v \rangle$ des Hilbert-Raumes $[\mathcal{L}^2([0, T])]^n$ eine Orthogonalitätsbedingung

$$\langle \dot{x}_0, x - x_0 \rangle := \int_0^T \dot{x}_0(t)^T [x(t; s, T) - x_0(t)] dt = 0$$

für die Abweichung $x(t; s, T) - x_0(t)$ der gesuchten Funktion formulieren. Nach Einsetzen der DGL fordert die *integrale Phasenbedingung* von E. Doedel Beyn (1991), Kuznetsov (1995)

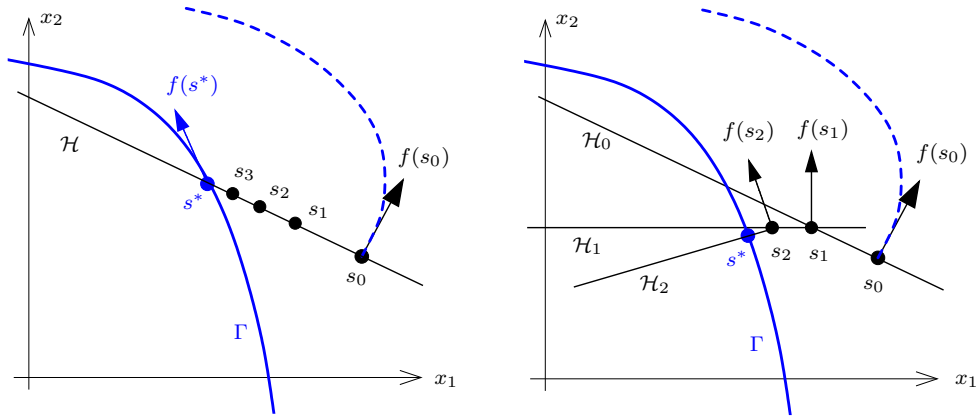


Abb. 10 Projektionsbedingung (links) und Bedingung von A. I. Mees (rechts)

$$h(s, T) := \int_0^T f(x_0(t))^T [x(t; s, T) - x_0(t)] dt = 0 \quad (52)$$

dass im Funktionenraum $[\mathcal{L}^2([0, T])]^n$ die Differenzfunktion $x - x_0$ orthogonal zur Funktion $\dot{x}_0 = f(x_0)$ sein muss.

Klären wir nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen das erweiterte System (47) eine reguläre Lösung (s^*, T^*) , also die Ausgangsaufgabe einen Grenzykel der Periode T^* besitzt. Der Einfachheit halber wählen wir vorerst die Poincaré-Phasenbedingung (50), womit wir

$$\begin{aligned} g(s, T) &= x(T, s) - s &= 0 \\ h(s, T) &= f(s_0)^T (s - s_0) &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

mit der vollständigen Jacobi-Matrix (M ist darin die Monodromiematrix)

$$H := \frac{\partial(g, h)}{\partial(s, T)} \Big|_{(s^*, T^*)} = \begin{pmatrix} M - I_n & f(s^*) \\ f(s_0)^T & 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

erhalten. Über die erwünschte Regularität der Lösung $(s^*, T^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ zeigen wir folgenden

Satz 25

Voraussetzung 21 sei erfüllt, und $x(t; s^*, T^*)$ ist reguläre periodische Lösung, d. h. $m_1 = 1$ ist geometrisch einfacher Eigenwert von M . Dann gilt für $s^* = x(0; s^*, T^*)$:

- i. H ist regulär und (s^*, T^*) eine reguläre Lösung des erweiterten Systems (53).
- ii. Das Newton-Verfahren konvergiert lokal quadratisch gegen (s^*, T^*) .

Beweisidee: Ersetzt man in (50) s_0 durch s^* , so lässt sich für diese „ideale“ Projektionsbedingung $h^*(s, T) = f(s^*)^T(s - s^*) = 0$ die Regularität der zugehörigen Jacobi-Matrix leicht nachweisen. Man zeigt dazu, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} M - I_n & f(s^*) \\ f(s^*)^T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tau \in \mathbb{R}$$

nur die triviale Lösung $(\sigma, \tau)^T = 0$ besitzt. Also ist seine Koeffizientendeterminante verschieden von Null. Wegen der stetigen Abhängigkeit dieser Determinante von s_0 ist dann auch $\det H \neq 0$ für hinreichend nahe bei s^* liegende Werte s_0 , womit (s^*, T^*) eine reguläre Nullstelle von (g, h) ist. Zusammen mit der Glattheit von f folgt daraus die lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens. \square

Zum entsprechenden Regularitätsnachweis für die integrale Phasenbedingung verweisen wir auf Doedel et al. (2003). Die Monodromiematrix M aus Formel (54) gewinnen wir als Nebenprodukt der Lösung: Denn konvergieren die Iterierten (s_k, T_k) des Newton-Verfahrens, so trifft das auch auf die entsprechenden Newton-Matrizen zu. Damit steht uns eine gute Approximation der Matrix H zur Verfügung. Durch Streichen der letzten Zeile und Spalte dieser Matrix entsteht $G = M - I_n$, woraus wir nach Addition der Einheitsmatrix I_n die Monodromiematrix M erhalten.

3.3 Technische Realisierung des Schießverfahrens

Wir versuchen nun, den Algorithmus 16 des Schießverfahrens ohne Nutzung des Variationsystems mit möglichst geringen Modifikationen auf den autonomen Fall zu übertragen und transformieren dazu das Problem mittels $t = \frac{T}{2\pi}\tau$ auf das Standardintervall $[0, 2\pi]$

$$\dot{x} = \frac{T}{2\pi}f(x), \quad x(2\pi) = x(0), \quad 0 < t < 2\pi. \quad (55)$$

Die unabhängige Variable haben wir nachfolgend wiederum mit t bezeichnet. Führen wir die konstante Funktion $T(t) = \text{const}$ ein, so ist zu den Näherungen (s_k, T_k) das transformierte AWP

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{T}{2\pi}f(x), & x(0; s_k, T_k) &= s_k \\ \dot{T} &= 0, & T(0; s_k, T_k) &= T_k \end{aligned} \right\} \quad \text{für } t \in [0, 2\pi] \quad (56)$$

zu lösen. Die nach Satz 8 garantierte Lösung sei $x(t; s_k, T_k), T(t; s_k, T_k)$. Das bestimmende Gleichungssystem mit Phasenbedingung (50)

$$\begin{aligned} g(s_k, T_k) &= x(2\pi; s_k, T_k) - s_k = 0 \\ h(s_k, T_k) &= f(s_0)^T(s_k - s_0) = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

ist dann mit einem Newton-ähnlichen Verfahren zu lösen. Um auf die Notation von Algorithmus 16 zurück zu kommen, bezeichnen wir nun die um eine Komponente erweiterten Funktionenvektoren $xx : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$xx(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ T(t) \end{pmatrix}, \quad ff(xx) := \begin{pmatrix} \frac{T}{2\pi} f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad ff : DD \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

sowie die konstanten Vektoren in \mathbb{R}^{n+1} der Einfachheit wegen mit Doppelbuchstaben

$$ss := \begin{pmatrix} s \\ T \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad ss_k := \begin{pmatrix} s_k \\ T_k \end{pmatrix}, \quad ss^* := \begin{pmatrix} s^* \\ T^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad gg(ss) := \begin{pmatrix} g(s, T) \\ h(s, T) \end{pmatrix}.$$

Dann erhält das AWP (56) wiederum die Standardform

$$\frac{d}{dt} xx = ff(xx), \quad xx(0; ss_k) = ss_k, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (58)$$

und das bestimmende Gleichungssystem (57) lautet

$$gg(ss) = 0 \quad \text{mit Lösung} \quad ss^* \in DD \subset \mathbb{R}^{n+1}. \quad (59)$$

Mit diesen Vektoren und Funktionen kann Algorithmus 16 leicht angepasst werden, indem statt der n Systeme nun stets $n + 1$ Gleichungen, definiert durch (57), (58) und (59), gelöst werden. Zu Startnäherungen s_0 und T_0 liefert der Algorithmus einen Punkt s^* des periodischen Orbits und zugleich dessen Periode T^* bis auf vorgegebene Genauigkeit tol . Schritt 3 in Algorithmus 16 ist abzuändern zu:

3. (Monodromiematrix) Setze $GG := gg'(ss_k)$ und reduziere GG um die $(n + 1)$ -te Zeile und Spalte $\Rightarrow G$. Setze $M := G + I_n$ und bestimme davon die Eigenwerte $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Die Monodromiematrix M kann auch hier nur mit einer maximalen Genauigkeit von $\sqrt{\varepsilon_M}$ mit der relativen Maschinengenauigkeit ε_M approximiert werden.

Beispiel 26

Das autonome System in \mathbb{R}^3 von W. F. Langford (vgl. Langford (1984))

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_3 - 0.7)x_1 - \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + (x_3 - 0.7)x_2 \\ \dot{x}_3 &= 0.6 + x_3 - x_3^3/3 - (x_1^2 + x_2^2)(1 + \varrho x_3) + \varepsilon x_3 x_1^3 \end{aligned} \quad (60)$$

besitzt mit den Konstanten $\omega = 3.5$, $\varepsilon = 0$, $\beta = 0.7$ und dem Kontrollparameter $\varrho \in [0.25, 2.00]$ die T -periodische Lösung

$$x(t; s^*, T^*) = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r := \sqrt{\frac{0.6 + \beta - \frac{1}{3}\beta^3}{1 + \varrho \cdot \beta}} = \frac{1.08888321993989}{\sqrt{1 + 0.7\varrho}}.$$

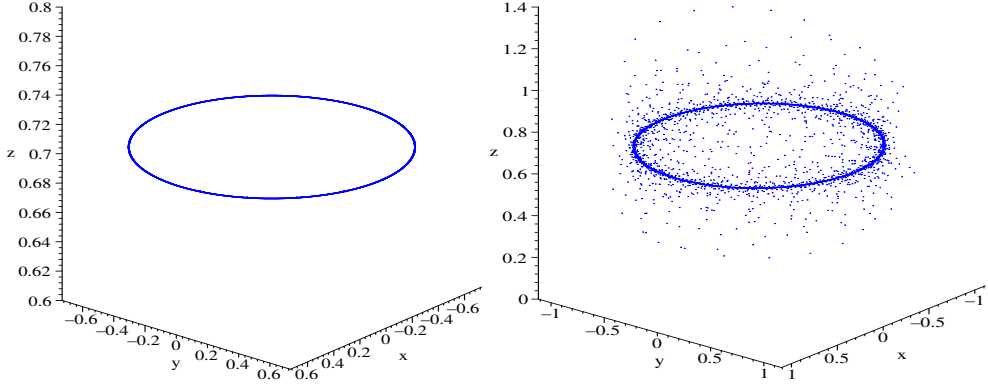


Abb. 11 Einschwingen der periodischen Lösungen für $\varrho = 2.0$ (links) und $\varrho = 0.7$ (rechts)

Die Phasenraum-Darstellung der Lösungen in Abbildung 11 lässt den langsamen Einschwingprozess für den Parameterwert $\varrho = 0.7$ erkennen. Die exakte Periodendauer $T_{ex}^* = 2\pi/\omega = 1.795\,195\,802\,051\,310\dots$ ist bekannt und kann damit zur Kontrolle der Resultatgenauigkeit genutzt werden. Algorithmus 16 liefert mit Startwerten $s_0 = (1, 0, 1)^T$, $T_0 = 2.0$ und Genauigkeitsschranke $tol = 10^{-9}$ die Werte in Tabelle 1. Während die Periodendauer T^* als 4. Lösungskomponente hier mit hoher Genauigkeit approximiert wurde, wird der Standardmultiplikator $m_1 = 1$ (der stets als Kontrollwert dienen kann) nur auf sechs Dezimalstellen geliefert. Die beiden restlichen Floquet-Multiplikatoren $m_{2,3}$ sind in diesem Beispiel stets konjugiert komplex. ■

Die technische Umsetzung der integralen Phasenbedingung (52) gestaltet sich schwieriger als die soeben angewandte Poincaré-Bedingung. Da sie in der Regel auf ein zuverlässigeres Lösungsverfahren führt, notieren wir sie nun ebenfalls für die transformierten Gleichungen (55):

$$\int_0^{2\pi} [x(t) - x_0(t)]^T \dot{x}_0(t) dt = 0. \quad (61)$$

Ist die darin auftretenden benachbarte Lösung $x_0(t)$ selbst 2π -periodisch – wenn diese z. B. durch eine Lösungsfortsetzung ermittelt wurde – so ergibt partielle Integration in (61) das zu lösende Randwertproblem mit einer Integralnebenbedingung

$$\dot{x} = \frac{T}{2\pi} f(x), \quad x(2\pi) = x(0), \quad \int_0^{2\pi} x(t)^T \dot{x}_0(t) dt = 0, \quad 0 < t < 2\pi. \quad (62)$$

Mit einem kleinen Trick gelingt es, diese Aufgabe in die Standardform für Zweipunkt-Randwertprobleme zu überführen. Wir definieren dazu den neuen Funktionenvektor $y : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ durch

$$y_i(t) := x_i(t), \quad i = 1(1)n, \quad y_{n+1}(t) := T, \quad y_{n+2}(t) := \int_0^t x(\tau)^T \dot{x}_0(\tau) d\tau$$

Tab. 1 Berechnete Lösungen und Floquet-Multiplikatoren zu Beispiel 26

ϱ	Lösung (s^*, T^*)	Multiplikatoren m_i	$ m_{2,3} $	$T^* - T_{ex}^*$
2.0	$s_1^* = 6.975\,518\text{e}-1$ $s_2^* = -8.630\,936\text{e}-2$ $s_3^* = 6.999\,999\text{e}-1$ $T^* = 1.795\,195\,801\,964\,12$	$m_1 = 0.999\,998\,877$ $m_2 = -0.597+0.260i$ $m_3 = -0.597-0.260i$	0.651	$-8.72\text{e}-11$
0.6	$s_1^* = 9.068\,526\text{e}-1$ $s_2^* = -1.122\,269\text{e}-1$ $s_3^* = 6.999\,999\text{e}-1$ $T^* = 1.795\,195\,801\,974\,54$	$m_1 = 1.000\,000\,348$ $m_2 = -0.937+0.371i$ $m_3 = -0.937-0.371i$	1.008	$-7.68\text{e}-11$
0.25	$s_1^* = 9.971\,034\text{e}-1$ $s_2^* = -1.219\,126\text{e}-1$ $s_3^* = 6.999\,999\text{e}-1$ $T^* = 1.795\,195\,801\,983\,02$	$m_1 = 1.000\,003\,622$ $m_2 = -1.167+0.475i$ $m_3 = -1.167-0.475i$	1.260	$-6.83\text{e}-11$

und erhalten die äquivalente Standardaufgabe in \mathbb{R}^{n+2} mit $n+2$ Differenzialgleichungen und $n+2$ Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\dot{y}_i &= \frac{y_{n+1}}{2\pi} f_i(y_1, \dots, y_n), & y_i(2\pi) &= y_i(0), \quad i = 1(1)n, \\
\dot{y}_{n+1} &= 0, & y_{n+2}(2\pi) &= 0, \\
\dot{y}_{n+2} &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot \dot{y}_{i0}, & y_{n+2}(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{63}$$

Bei gegebener Startlösung $y_0(t) = (y_{10}(t), y_{20}(t), \dots, y_{n0}(t))^T$ liefert deren Einsetzen in die DGL die hier benötigten Ableitungen $\dot{y}_{i0}(t)$. Auf die Aufgabe (63) können dann die bekannten Standardverfahren aus Hoffmann et al. (2006) angewendet werden. Die Umsetzung dieses Zuganges wird dem Leser überlassen.

3.4 Stabilitätsanalyse

Anders als im speziellen Beispiel 26 hängt die Periodendauer T^* in autonomen Systemen oft vom Kontrollparameter ab. So entsteht das Problem, dass benachbarte periodische Orbits $\{\varphi_t(s^*)\}$ und $\{\varphi_t(s)\}$ verschiedene Periodendauer T^* und T haben können. Für das mathematische Pendel mit der Gleichung

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \quad \text{bzw. als System} \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1 \tag{64}$$

sind in Abbildung 12 zahlreiche periodische Orbits mit $s^* = (\alpha^*, 0)^T$, $0 < \alpha^* < \pi$ in blau dargestellt.

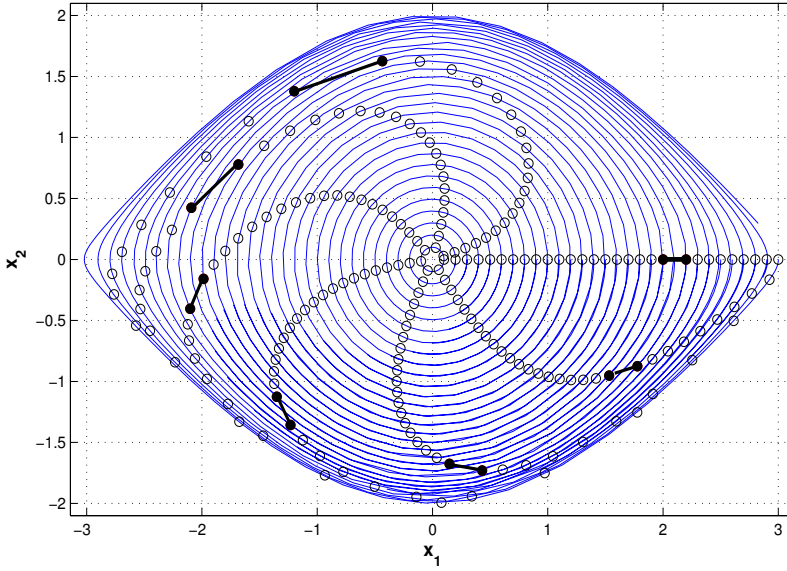


Abb. 12 Verlauf der Orbits in (64) zu identischen Zeitpunkten

Für kleine Auslenkung α^* wird (64) approximativ durch die harmonische Gleichung mit Periodendauer $T^* = 2\pi$ beschrieben, während für $\alpha^* \rightarrow \pi$ die Periode T^* gegen Unendlich tendiert, denn $(\pm\pi, 0)^T$ sind Gleichgewichtspunkte. Durch $s^* = (\alpha^*, 0)^T$ verlaufe der in Abbildung 12 mit schwarzen Punkten gekennzeichnete Orbit. Der Abstand $\|\varphi_t(s) - \varphi_t(s^*)\|$ des benachbarten periodischen Orbits durch $s = (\alpha, 0)^T$ (schwarz eingezeichnet) wächst für $t \rightarrow \infty$ sogar über den Wert α^* an. Obwohl beide Orbits im Phasenraum geometrisch nahe beieinander liegen, kann $\{\varphi_t(s^*)\}$ nicht Ljapunov-stabil sein! Wir betrachten deshalb den geometrischen Abstand zweier Phasenkurven, ohne aber dieselbe Zeit t für je zwei Punkte zu fordern. Es sei $\gamma^* = \{x \in D \mid x = \varphi_t(s^*), t \geq 0\}$ der (nicht notwendig periodische) positive Semiorbit durch $s^* \in D$. Zu $s \in D$ bezeichnet dann

$$d(s, \gamma^*) := \inf_{t \geq 0} \|s - \varphi_t(s^*)\| \quad (65)$$

den geometrischen Abstand des Punktes von γ^* im Phasenraum. Damit gewinnen wir

Definition 27 (Orbitale Stabilität)

- i. $\{\varphi_t(s^*)\}$, $t \geq 0$, heißt *orbital stabil*, wenn zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $s \in D$ mit $\|s - s^*\| < \delta$ stets $d(\varphi_t(s), \gamma^*) < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$ gilt.
- ii. Ist $\{\varphi_t(s^*)\}$ orbital stabil und es existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $s \in D$ mit $d(s, \gamma^*) < \delta_1$ stets $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi_t(s), \gamma^*) = 0$ folgt, so ist $\{\varphi_t(s^*)\}$ *asymptotisch orbital stabil*.
- iii. Ist $\{\varphi_t(s^*)\}$ nicht orbital stabil, so heißt es *orbital instabil*.

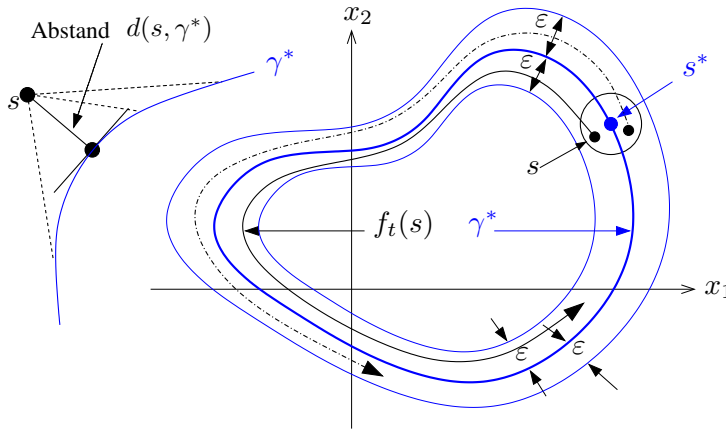


Abb. 13 Orbitale Stabilität in der Phasenebene

Abbildung 13 demonstriert den Begriff der orbitalen Stabilität in der Phasenebene. Wegen

$$d(\varphi_t(s), \gamma^*) = \inf_{t \geq 0} \|\varphi_t(s) - \gamma^*\| \leq \|\varphi_t(s) - \varphi_t(s^*)\| \quad \forall t \geq 0$$

folgt aus der (asymptotischen) Ljapunov-Stabilität die (asymptotische) orbitale Stabilität. Ist x^* eine Gleichgewichtslösung, so fallen diese beiden Stabilitätsbegriffe zusammen, denn für $x \in D$ gilt nun die Gleichheit $d(\varphi_t(x), \gamma^*) = \|\varphi_t(x) - \varphi_t(x^*)\|$ für alle $t \geq 0$. Eine algebraische Charakterisierung liefert der folgende grundlegende Satz, dessen umfangreichen Beweis man in der Grundlagenliteratur, z. B. bei Pontrjagin (1965), findet:

Satz 28 (Andronov & Witt)

$\{\varphi_t(s^*)\}$ sei ein periodischer Orbit des autonomen Systems $\dot{x} = f(x)$ mit den Floquet-Multiplikatoren m_i , $i = 1(1)n$, wobei der Hauptmultiplikator $m_1 = 1$ ist.

- i. Ist $|m_i| < 1$ für $i = 2(1)n$, so ist $\{\varphi_t(s^*)\}$ asymptotisch orbital stabil.
- ii. Ist $|m_i| > 1$ für ein $i \in \{2, \dots, n\}$, so ist $\{\varphi_t(s^*)\}$ orbital instabil.

Beispiel 29

Wir betrachten die Ergebnisse aus Beispiel 26 für den periodischen Orbit der Periode $T_{ex}^* = 2\pi/\omega = 1.795\,195\,802\,051\,310\dots$ Während der Satz von Andronov & Witt für den Kontrollparameter $\varrho = 2.0$ die asymptotische Stabilität garantiert, ist der Orbit für die Parameterwerte $\varrho = 0.6$ und $\varrho = 0.25$ instabil (vgl. Tabelle 1). Genauere Rechnung liefert für den „kritischen“ Wert $\varrho = 0.615\,444\,65\dots$ Floquet-Multiplikatoren mit $m_1 = 1$, $|m_{2,3}| = 1$, so dass mit dem Satz dann keine Stabilitätsaussage möglich ist. ■

4 Die Poincaré-Abbildung

4.1 Definition und Eigenschaften

Die Poincaré-Abbildung stellt ein wesentliches Hilfsmittel dar, um Existenz, Stabilität und Verzweigungen periodischer Lösungen zu untersuchen und zugleich das Lösungsverhalten geometrisch zu veranschaulichen. So kann diese Abbildung genutzt werden, um die Anwendung des impliziten Funktionentheorems auf dem Gebiet der Differenzialgleichungen zu demonstrieren. Der Nachweis eines Grenzzykels einer autonomen DGL gelingt ebenfalls unschwer mittels der Poincaré-Abbildung.

Wir wollen aus diesem Grund die Konstruktion und die Eigenschaften dieser wichtigen Abbildung detailliert behandeln, weiter verallgemeinern und schließlich ein überaus effektives numerisches Verfahren zur Berechnung der Abbildungspunkte gewinnen. Wir betrachten dazu das autonome System

$$\dot{x} = f(x), \quad f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (66)$$

mit glattem Vektorfeld $f \in C^r(D)$, $r \geq 2$, und dem damit erzeugten Fluss $\varphi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nach Voraussetzung 21 besitzt das System eine periodische Lösung $\varphi_t(x_0)$ der Periode

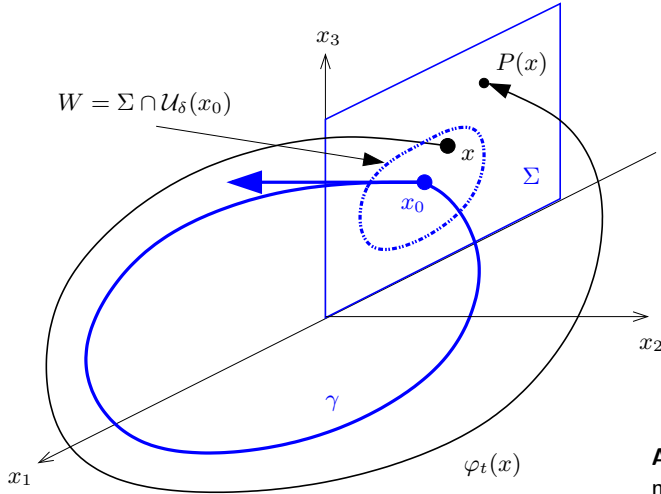


Abb. 14 Poincaré-Abbildung mit Ebene Σ in \mathbb{R}^3

T , die eine gegebene Anfangsbedingung $\varphi_0(x_0) = x_0$ erfüllt. Wir legen nun, wie in Abbildung 14 dargestellt, eine Hyperebene Σ durch x_0 , die senkrecht auf dem Orbit $\gamma = \{\varphi_t(x_0)\}$ steht und betrachten Lösungen $\varphi_t(x)$, die an Punkten $x \in \Sigma$ aus einer δ -Umgebung $W = \Sigma \cap \mathcal{U}_\delta(x_0)$ starten. Liegt x hinreichend nahe bei x_0 , so ist zu erwarten, dass $\varphi_t(x)$ die Hyperebene ebenfalls nahe x_0 in einem Punkt $P(x)$ schneiden wird. Die

Abbildung $x \mapsto P(x)$ wurde von *Henri Poincaré*² bereits 1881 eingeführt und später nach ihm benannt. Die Existenz und stetige Differenzierbarkeit dieser Abbildung wird z. B. von Perko (1996) nachgewiesen. Die benötigte Rückkehr-Zeit $\tau(x)$ hat folgende Eigenschaft:

Satz 30

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $f \in C^1(D)$. Die periodische Lösung $\varphi_t(x_0)$ habe die Periode T und der durch diese Lösung definierte Orbit γ liege in D .

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x_0)^T(x - x_0) = 0\} \quad (67)$$

beschreibt die zu γ orthogonale Hyperebene bei x_0 . Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine eindeutig bestimmte Funktion $\tau(x)$, definiert und stetig differenzierbar für alle x aus einer δ -Umgebung $\mathcal{U}_\delta(x_0)$, so daß $\tau(x_0) = T$ ist und $\varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma \quad \forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ gilt.

Die Rückkehr-Zeit $\tau(x)$ ist also diejenige Zeit, die ein bei $x \in W$ beginnender Orbit $\varphi_t(x)$ benötigt, um wieder in Σ anzukommen. Dieses $\tau(x)$ hängt im Allgemeinen vom Startpunkt x ab und muss nicht identisch mit der Periode T von γ sein. Allerdings konvergiert $\tau(x) \rightarrow T$ für $x \rightarrow x_0$. Die lokal definierte eindeutige Abbildung $P : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $W = \mathcal{U}_\delta(x_0) \cap \Sigma$ und

$$P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x) \quad (68)$$

heißt *lokale Poincaré-Abbildung* (auch: *first return map*) für den Orbit γ an der Stelle x_0 . Folgende Eigenschaften lassen sich für die Abbildung P nachweisen:

1. $P \in C^1(W)$. Falls f sogar analytisch in D ist, so ist auch P analytisch in W .
2. P hat eine stetig differenzierbare inverse Abbildung P^{-1} ; damit ist P ein C^1 -Diffeomorphismus (d. h. eine C^1 -Funktion mit C^1 -Inverser).
3. $x \in \Sigma$ ist ein Fixpunkt von P , d. h. $P(x) = x$ genau dann, wenn $\varphi_t(x)$ ein periodischer Orbit von (67) ist.

Der Begriff der Poincaré-Abbildung lässt sich auch auf periodische Orbits verallgemeinern, die auf Mannigfaltigkeiten verlaufen: Es sei $\gamma(t)$ ein periodischer Orbit eines Flusses φ_t mit Periode T auf einer Mannigfaltigkeit M . Weiterhin sei x_0 ein Punkt des Orbits mit $x_0 = \gamma(0)$ und Σ ein lokaler transversaler Schnitt, d. h. eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1, transversal zu γ (also ist $\gamma'(0)$ nicht tangential zu Σ). Es sei $D \subset M \times \mathbb{R}$ ein offenes Gebiet, auf dem der Fluss φ_t definiert ist.

² Mit epochalen Werken zu mathematischen Methoden der Himmelsmechanik gilt Jules Henri Poincaré (1854–1912) als einer der herausragenden Mathematiker und theoretischen Astronomen unserer Zeit und zugleich als Pionier der Theorie dynamischer Systeme.

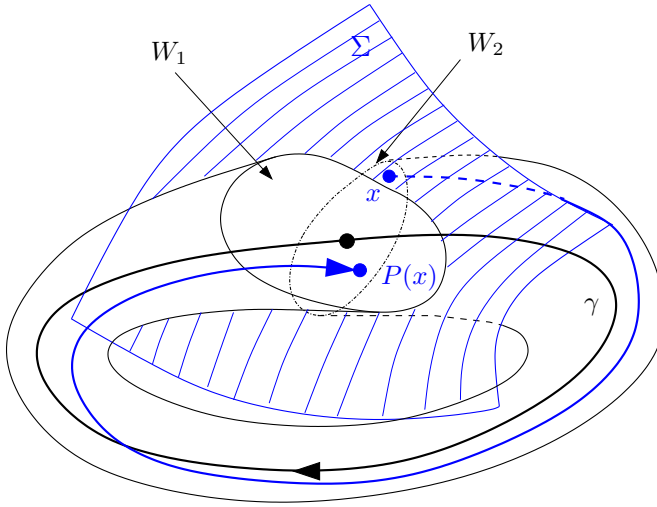


Abb. 15 Poincaré-Abbildung auf Mannigfaltigkeiten

Definition 31 (Verallgemeinerte Poincaré-Abbildung)

Eine *lokale Poincaré-Abbildung* (first return map) von γ ist eine Abbildung $P : W_0 \rightarrow W_1$ mit folgenden Eigenschaften (vgl. Abb. 15):

- i. $W_0, W_1 \subset \Sigma$ sind offene Umgebungen von $x_0 \in \Sigma$ und P ist ein C^r -Diffeomorphismus.
- ii. Es existiert eine Funktion $\tau : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in W_0$ gilt: $(x, \tau(x)) \in D$ und $P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x)$.
- iii. Falls $t \in (0, \tau(x))$, so $\varphi_t(x) \notin W_0$.

Die Existenz einer verallgemeinerten Poincaré-Abbildung in der Umgebung eines geschlossenen Orbits wird von Marsden und McCracken (1976) nachgewiesen. In \mathbb{R}^3 kann der Poincaré-Schnitt also eine beliebige glatte Fläche Σ sein, die den Orbit γ allerdings transversal schneiden muss.

Poincaré-Abbildungen lassen sich oft auch ohne Bezug auf einen periodischen Orbit konstruieren. Existiert eine Hyperebene $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, die

- von jeder Lösungskurve $\{\varphi_t(x)\}$ transversal geschnitten wird und
- zu jedem $x \in \Sigma$ einen Rückkehrpunkt $\varphi_t(x) \in \Sigma$, $t > 0$, besitzt,

so definiert Σ einen globalen Poincaré-Schnitt, und die Abbildung $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ mit

$$P(x) = \varphi_{\tau(x)}(x), \quad x \in \Sigma,$$

ist eine *globale Poincaré-Abbildung* mit der Rückkehrzeit $\tau(x)$. Zur Anwendung notieren wir periodisch erregte DGL-Systeme als autonome DGL:

$$\dot{x} = f(x, \theta), \quad \dot{\theta} = 1, \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1. \quad (69)$$

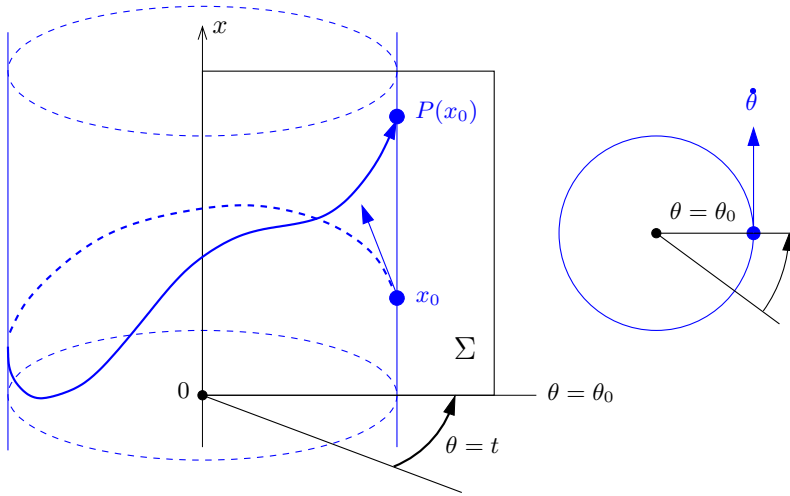


Abb. 16 Stroboskop-Abbildung

Der Phasenraum wird dann durch die zylindrische Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ beschrieben, wobei $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}(\text{mod } T)$ als zirkulare Komponente die T -Periodizität des Vektorfeldes f in θ widerspiegelt. Für dieses Problem kann man nun den globalen Poincaré-Schnitt

$$\Sigma = \{ (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \mid \theta = \theta_0 \}$$

definieren, da wegen $\dot{\theta} = 1$ alle Lösungen Σ transversal schneiden (vgl. Abb. 16). Die Poincaré-Abbildung $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ wird nun definiert durch

$$P(x_0) = \pi \varphi_T(x_0, \theta_0), \quad (70)$$

worin φ_t der Fluss von (69) ist und π seine Projektion auf die x -Komponente bedeutet. Offenbar ist die Zeit zwischen zwei Abbildungspunkten stets gleich T für alle $x \in \Sigma$. Wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\theta_0 = 0$ und bezeichnen die Projektion des Flusses auf die x -Komponente mit $\psi_t(x) := \pi \varphi_t(x, 0)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, so kommen wir zur *Stroboskop-Abbildung*³ $P : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$P(x) = \psi_T(x) = \pi \varphi_T(x, 0).$$

Die k -te Iteration der stroboskopischen Abbildung liefert den Systemzustand zur Zeit $t_0 + kT$, d. h. das System wird periodisch „beleuchtet“. Unter den Voraussetzungen 3 ist diese eindeutige Abbildung für alle x in einer Umgebung $\mathcal{U}_\rho(x_0) \subset D$ des Punktes $x_0 = x^*(0)$ definiert.

³Stroboskop (griech.): optisches Gerät zum Beobachten und Messen rasch ablaufender Vorgänge (z. B. Drehzahlmessung) mit Hilfe eines periodisch unterbrochenen Lichtstrahls.

Bemerkung 32

Mittels der Poincaré-Abbildung P lassen sich oft Konvergenz- und Stabilitätsaussagen für Fixpunktaufgaben in \mathbb{R}^n , z. B. Fixpunktsätze, anwenden. Denn zu $k \in \mathbb{Z}$ bedeutet die k -fache Anwendung der Poincaré-Abbildung auf ein $x \in D$ den Übergang vom betrachteten zeitkontinuierlichen dynamischen System $DS_1 = (\mathbb{R}, D, \varphi_t)$ zu einem zeitdiskreten System $DS_2 = (\mathbb{Z}, D, \psi_k)$ mit

$$\psi_k(x) := P^k(x) = P(P \cdots P(P(x)) \cdots), \quad x \in D, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Der Übergang von DS_1 zum zeitdiskreten System DS_2 transformiert insbesondere

- T -periodische Lösungen $\varphi_t(x_0)$ in Fixpunkte x_0 von P
- m -fach subharmonische Lösungen, d. h. mT -periodische Lösungen mit $m \in \mathbb{N}, m > 1$, in m -periodische Orbits von DS_2 sowie
- quasi-periodische Lösungen von DS_1 mit 2 Basisfrequenzen in geschlossene Invarianzkurven. von DS_2 ■

4.2 Ableitung der Poincaré-Abbildung

Die Ableitung $DP(x_0)$ der Poincaré-Abbildung in einem Punkt x_0 des periodischen Orbits $\gamma = \{\varphi_t(x_0)\}$ erhalten wir, indem wir den Effekt kleiner Variationen der Anfangsbedingungen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ analysieren. Zur Vereinfachung der Darstellung verschieben wir den Koordinatenursprung in den Punkt x_0 und benutzen als x_n -Achse den normierten Tangentenvektor $\xi_n = f(x_0)/\|f(x_0)\|$ an den Orbit im Punkt x_0 . Die restlichen $n-1$ orthogonalen Basisvektoren $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ sollen die Hyperebene Σ aufspannen, wie dies in Abbildung 17 für den 3-dimensionalen Fall dargestellt ist. Unter diesen Annahmen

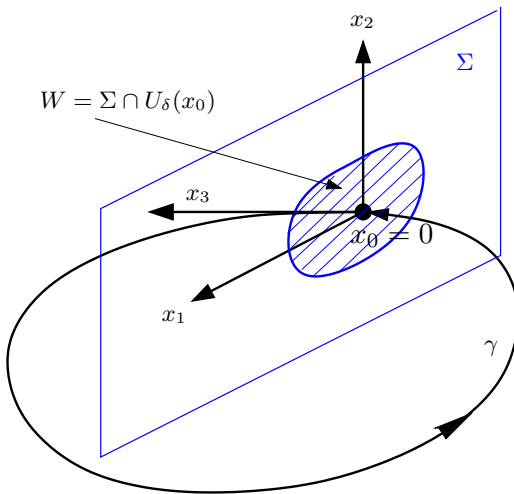


Abb. 17 Poincaré-Schnitt zu (72)

kann die Ableitung $DP(0)$ der Poincaré-Abbildung im Punkt $x_0 = 0$ angegeben werden. Einen Beweis des Satzes findet man bei Perko (1996).

Satz 33

Es sei $f \in C^1(D)$ und $\varphi_t(0)$ bezeichne den periodischen Orbit γ mit Periode T^* in D . Für hinreichend kleines $\delta > 0$ und $x \in \Sigma \cap \mathcal{U}_\delta(0)$ sei $P(x)$ die gerade eingeführte Poincaré-Abbildung. Dann wird die Ableitung $DP(0)$ durch die Matrix

$$DP(0) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(0, T^*) \right), \quad i, j = 1(1)n-1, \quad (71)$$

definiert, wobei $\varphi(x, t) = \varphi_t(x)$ der durch (67) gegebene Fluss ist.

Mit der Definition 12 der Monodromiematrix

$$M = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(s^*, T^*) = X(s^*, T^*) = e^{T^* R}$$

und $s^* = 0$ erhalten wir $DP(0)$ aus der Monodromiematrix, indem wir deren n -te Zeile und n -te Spalte streichen. Die Eigenwerte von $DP(0)$ sind nun genau die $n-1$ Floquet-Multiplikatoren m_1, m_2, \dots, m_{n-1} ohne den Hauptmultiplikator $m_n = 1$. Wegen der Invarianz des Spektrums bezüglich linearer Transformationen gilt diese Eigenschaft auch allgemein für beliebige orthogonale Poincaré-Schnitte in einem Kurvenpunkt x_0 .

Beispiel 34

Das um eine Gleichung erweiterte Beispiel 22 mit Parameter $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2 \\ \dot{x}_2 &= \lambda x_2 - x_3 - x_2(x_2^2 + x_3^2) \\ \dot{x}_3 &= x_2 + \lambda x_3 - x_3(x_2^2 + x_3^2) \end{aligned} \quad (72)$$

besitzt zum Punkt $s^* = (2, \sqrt{\lambda}, 0)^T$ und $T^* = 2\pi$ die periodische Lösung mit Hauptlösungsmatrix (vgl. dazu Bsp. 24)

$$x(t; s^*, T^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{\lambda} \cos t \\ \sqrt{\lambda} \sin t \end{pmatrix}, \quad X(t; s^*, T^*) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda t} \cdot \cos t & -\sin t \\ 0 & e^{-2\lambda t} \cdot \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

was man leicht durch Lösung des Variationssystems bestätigt. Die Monodromiematrix $M = X(T^*; s^*, T^*) = \text{diag}(e^{-2\pi}, e^{-4\lambda\pi}, 1)$ liefert außer dem Hauptmultiplikator $m_3 = 1$ nun die beiden Eigenwerte $m_1 = e^{-2\pi}$, $m_2 = e^{-4\lambda\pi}$ der Ableitung $DP(s^*)$ der in Abbildung 17 dargestellten Poincaré-Abbildung. ■

Notieren wir periodisch erregte Systeme wie in (69) ebenfalls als autonome DGL in \mathbb{R}^{n+1}

$$\dot{x} = f(x, \theta), \quad \dot{\theta} = 1, \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1, \quad (73)$$

so ergibt sich die leicht nachweisbare

Folgerung 35

Der Hauptmultiplikator von (73) ist $m_{n+1} = 1$ und die weiteren Eigenwerte von $DP(x_0)$ sind genau die n Floquet-Multiplikatoren m_1, m_2, \dots, m_n der Lösung des periodisch erregten Systems bzw. der Stroboskop-Abbildung $P(x_0) = x(x_0, T)$.

Beweis: Mit dem erweiterten Vektor $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1})^T = (x, \theta)^T$ lautet das erweiterte Variationssystem an der periodischen Lösung

$$\dot{Y} = \begin{pmatrix} D_x f(x^*(t), t) & D_t f(x^*(t), t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(0) = I_{n+1},$$

woraus wir mit der vorgegebenen Lösungsperiode T die erweiterte Monodromiematrix

$$M = Y(T) = \begin{pmatrix} X(T) & \xi(T) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi(T) \in \mathbb{R}^n,$$

erhalten. Darin ist $X(T)$ die Monodromiematrix des periodisch erregten Systems mit den n Floquet-Multiplikatoren m_1, m_2, \dots, m_n , womit die Behauptung folgt. \square

4.3 Numerische Approximation der Poincaré-Abbildung

In praktischen Anwendungen kann die Poincaré-Abbildung P selten explizit berechnet werden und muss deshalb durch numerische Lösung der DGL approximiert werden. Für T -periodisch erregte Systeme ist das wegen des speziellen Falles der Stroboskop-Abbildung leicht möglich, wenn wir die Lösung $\varphi(t; t_0, x_0)$ an den vorgegebenen Zeitpunkten $t_k = kT$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$ berechnen und als Werte $P^k(x_0)$ abspeichern. Anders verhält es sich jedoch bei autonomen Systemen, wenn ein Durchstoßpunkt der Trajektorie $\varphi(t; t_0, x_0)$ durch eine Hyperebene Σ numerisch zu bestimmen ist. Die Rückkehrzeit $t^* = \tau(x_0)$ gemäß Satz 30 ist meist unbekannt und muss deshalb möglichst effizient berechnet werden. Nachfolgend werden zwei Zugänge dafür vorgestellt. Wir lassen als Poincaré-Schnitt beliebige Hyperebenen $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ mit der Gleichung

$$H(x) := \langle v, x - \xi \rangle = v^T(x - \xi) = \sum_{i=1}^n v_i(x_i - \xi_i) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (74)$$

zu, die jedoch die Transversalitätsbedingung $v^T f(\varphi(t^*; t_0, x_0)) > 0$ erfüllen sollen, d. h. der Normalvektor v von Σ bildet mit dem Tangentialvektor an das Vektorfeld in $\varphi(t^*; t_0, x_0)$ einen spitzen Winkel. ξ ist der „Aufpunkt“ der Hyperebene und v der Normalvektor mit $\|v\|_2 = 1$, wie dies für den 2-dimensionalen Fall in Abbildung 18 dargestellt ist. Zu gegebenem Startpunkt $x_0 \in \Sigma$ und Startzeit t_0 wollen wir die Lösung der DGL $\dot{x} = f(x)$ vereinfachend mit $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$ bezeichnen. Eine numerische Integration liefert für $t = t_\alpha$ den letzten „vor der Hyperebene“ liegenden Lösungswert $x(t_\alpha)$,

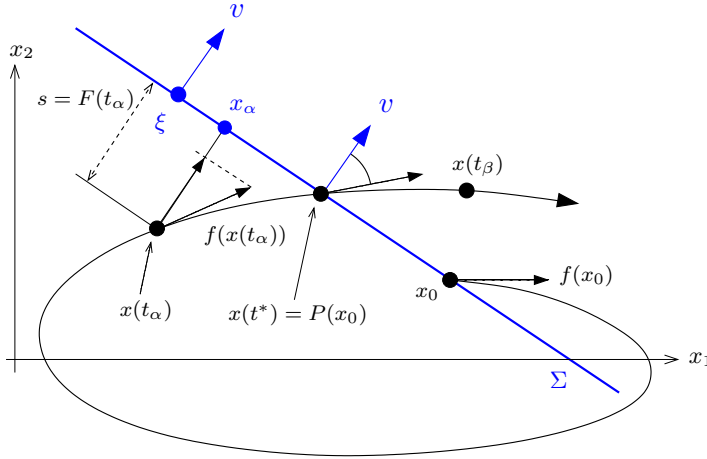


Abb. 18 Hyperebene Σ und Poincaré-Schnitt in \mathbb{R}^2

während der folgende Lösungspunkt $x(t_\beta)$ mit Integrationsschrittweite $h = t_\beta - t_\alpha > 0$ bereits jenseits von Σ liegt. Projizieren wir – wie in Abbildung 18 dargestellt – den Punkt $x(t_\alpha)$ orthogonal auf die Hyperbene in den Punkt x_α , so erhalten wir mit $x(t_\alpha) = x_\alpha + sv$ aus der Hyperbenen-Gleichung (74)

$$H(x(t_\alpha)) := \langle v, x(t_\alpha) - \xi \rangle = v^T(x_\alpha + sv - \xi) = v^T(x_\alpha - \xi) + sv^T v = s$$

mit dem negativen Abstand s .

1. Das *Newton-Verfahren* bestimmt eine Nullstelle t^* der skalarwertigen Abstandsfunktion $F : I^* \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(t) := H(x(t)) = v^T(x(t) - \xi) \quad \text{auf} \quad I^* = [t_\alpha, t_\beta]. \quad (75)$$

Offenbar ist diese Funktion nach Voraussetzung 21 stetig differenzierbar mit $F(t_\alpha) < 0$, $F(t_\beta) > 0$ und $\dot{F}(t) = v^T \dot{x}(t) = v^T f(x(t)) > 0$ für hinreichend kleines $h > 0$ wegen der Transversalitätsbedingung $v^T f(\varphi(t^*; t_0, x_0)) > 0$. Damit erhalten wir das Newton-Verfahren zur Bestimmung des Durchstoß-Zeitpunktes t^* zu

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)}{\dot{F}(t_k)} = t_k - \frac{v^T(x(t_k) - \xi)}{v^T f(x(t_k))}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Als Startwert wählen wir $t_1 = t_\alpha$ mit dem zuvor berechneten Lösungspunkt $x_1 = x(t_\alpha)$. Die Hyperebene Σ legen wir durch einen Punkt ξ möglichst nahe bei $x(t^*)$, z. B. durch den Urbildpunkt $\xi = x_0$, und wählen den Normalvektor $v = f(\xi)/\|f(\xi)\|$, um so die Transversalitätsbedingung zu erfüllen:

Iteriere für $k = 1, 2, 3, \dots$, beginnend mit $t_1 = t_\alpha$, $x_1 = x(t_\alpha)$:

(1) Newton-Schritt:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{f(\xi)^T (x_k - \xi)}{f(\xi)^T f(x_k)}$$

(2) Integrationsschritt: Integriere die DGL in $[t_k, t_{k+1}]$ mit einem Schritt

$$\Rightarrow x_{k+1} = \varphi(t_{k+1}; t_k, x_k)$$

$H(x(t_k)) = v^T(x(t_k) - \xi)$ gibt den Abstand des k -ten Näherungspunktes von der Hyperebene Σ an, während $v^T f(x(t_k))$ die Komponente des Vektorfeldes an $x(t_k)$ liefert, die in Richtung von Σ zeigt. Damit liefert die Newton-Korrektur $(v^T(x(t_k) - \xi))/(v^T f(x(t_k)))$ diejenige Zeit, die die Lösung benötigen würde, um von $x(t_k)$ zur Hyperebene zu gelangen, falls das Vektorfeld konstant mit dem Wert $f(x(t_k))$ wäre. Wegen der lokal quadratischen Konvergenz kommt das Newton-Verfahren so mit sehr wenigen Zusatzschritten aus.

2. M. Hénon entwickelte 1982 ein noch schnelleres Verfahren (vgl. Anishchenko (1987)), das meist mit einem einzigen Zusatzschritt zur Bestimmung von $x(t^*)$ auskommt. Der Abstand eines beliebigen Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ von der eingeführten Hyperebene Σ ist wegen der Darstellung $x = x_\alpha + sv$

$$H(x) = v^T(x - \xi) = v^T(x_\alpha - \xi) + sv^T v = s.$$

Hénons Idee besteht darin, diesen Abstand s als neue unabhängige Variable anstelle von t mittels $s = s(t)$ einzuführen und die DGL zu transformieren. Für deren Lösung $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$ liefert $s = s(t) = v^T(x(t) - \xi)$ die Ableitung $\dot{s}(t) = v^T f(x(t))$, womit sich die Ableitung der inversen Funktion $t = t(s)$ zu

$$t'(s) = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{v^T f(x(t(s)))}$$

ergibt. Führen wir die Funktion $y(s) = x(t(s))$ ein, so transformieren wir sofort die DGL mittels

$$y'(s) = \dot{x}(t(s)) t'(s) = \frac{f(y(s))}{v^T f(y(s))}$$

auf die neue unabhängige Variable s . Zum Zeitpunkt $t = t_\alpha$ liegt der Lösungswert $x(t_\alpha)$ vor, womit wir unmittelbar die Anfangswerte

$$s_\alpha = H(x(t_\alpha)) = v^T(x(t_\alpha) - \xi) < 0 \quad \text{und} \quad y(s_\alpha) = x(t_\alpha)$$

gewinnen. Eine Integration des Systems für $(y, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ im Intervall $[s_\alpha, 0]$ ergibt dann die „Endwerte“ für den Abstand $s = 0$, d. h. den Durchstoß-Zeitpunkt $t(0) = t^*$ und den Bildpunkt $y(0) = x(t(0)) = x(t^*)$ in der Hyperebene Σ :

Gegeben sind t_α und $x_\alpha = x(t_\alpha)$ sowie die Hyperebene Σ mit (ξ, v) .

(1) Anfangswert: Bestimme $s_\alpha = v^T(x_\alpha - \xi) < 0$.

(2) Integrationsschritt: Integriere die $n + 1$ DGL in $[s_\alpha, 0]$

$$y'(s) = \frac{f(y(s))}{v^T f(y(s))}, \quad y(s_\alpha) = x_\alpha,$$

$$t'(s) = \frac{1}{v^T f(y(s))}, \quad t(s_\alpha) = t_\alpha.$$

(3) Endwerte: Durchstoß-Zeit $t^* = t(0)$ und Bildpunkt $x(t^*) = y(0)$.

Beispiel 36

Wir vergleichen die beiden numerischen Methoden an Beispiel 26 von W. F. Langford mit Parametern $\omega = 3.5$, $\varrho = 0.25$ und $\varepsilon = 0$. Als „Aufpunkt“ der Hyperebene wählen wir stets $\xi = (0, 0.9, 0.7)^T$ und verändern nur den Normalvektor v . Um den Zusatzaufwand zur Errechnung der Durchstoßpunkte zu ermitteln, integrieren wir die DGL mit 5000 Auswertungen der rechten Seiten (desweiteren als f -Bestimmungen bezeichnet).

Tab. 2 Zahl der f -Bestimmungen für die Poincaré-Abbildung zu Beispiel 36

Normalvektor v	Newton-Verfahren	Hénon-Verfahren
$(-3.15, 0, -0.092)^T$	1307 (26.13 %)	496 (9.92 %)
$(0, 0, -1)^T$	570 (11.41 %)	208 (4.16 %)
$(-1, 0, 0)^T$	1326 (26.51 %)	494 (9.87 %)

Tabelle 2 gibt diejenige Zahl von f -Bestimmungen an, die davon für die Berechnung der Poincaré-Abbildung benötigt werden. Obwohl beide Methoden zuverlässig und präzise arbeiten, erweist sich die Hénon-Methode stets als effizienter. ■

Weitere in der Literatur Parker und Chua (1989) empfohlene Ansätze, wie das Bisektionsverfahren zur Nullstellenbestimmung der Abstandsfunktion $F(t)$ aus (75) oder die Approximation der Durchstoßzeit t^* durch genaue Interpolation dieser Funktion sind den beiden vorgestellten Verfahren durchweg unterlegen und werden deshalb nicht empfohlen.

5 Lösungsfortsetzung und Bifurkationsanalyse

Wie schon erwähnt, soll nun das dynamische System von einem reellen Kontrollparameter $\lambda \in \Lambda = [a, b]$ abhängen. Wir wollen die bereits in Vogt (2010) für Gleichgewichtslagen eingeführten Fortsetzungstechniken auch zur Verfolgung periodischer Orbits einsetzen

und zugleich die numerische Analyse von Stabilität und auftretenden Bifurkationen periodischer Orbits behandeln.

5.1 Numerische Fortsetzung und Stabilitätsanalyse

Wir betrachten nachfolgend parameterabhängige autonome Systeme in $D \subset \mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad f : D \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \Lambda = [a, b], \quad D \text{ offen.} \quad (76)$$

Alle Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf den numerisch einfacheren periodisch erregten Fall mit bekannter Lösungsperiode aus Abschnitt 2 übertragen, was nach dem Studium der folgenden Ausführungen gewiss leicht fallen dürfte. Zuerst notieren wir die Voraussetzungen 21 für den parameterabhängigen Fall:

Voraussetzung 37

Es sei $\Lambda_\varepsilon = (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \supset \Lambda$ mit $\varepsilon > 0$.

- i. $f \in C^r(D \times \Lambda_\varepsilon)$, $r \geq 2$.
- ii. System (76) besitzt für alle $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$ einen Grenzykel $x^*(t, \lambda)$, $t \in \mathbb{R}$, der Periode $T^*(\lambda) > 0$, der keine Gleichgewichtslage ist.

Wir wollen diesen Grenzykel $x^*(t, \lambda)$ samt seiner Periodendauer $T^*(\lambda)$ nun für alle Parameterwerte $\lambda \in \Lambda$ approximieren. Dazu überführen wir die Schwingungsaufgabe in ein Fortsetzungsproblem in \mathbb{R}^{n+1} . Ist $\lambda \in \Lambda$ ein fester Parameterwert, so können wir wie in Abschnitt 37 vorgehen. Zu gegebenen Näherungen $s_k \in D$, $T_k > 0$ betrachten wir das folgende transformierte AWP:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Tf(x, \lambda), & x(0; s_k, T_k, \lambda) &= s_k \\ \dot{T} &= 0, & T(0; s_k, T_k, \lambda) &= T_k \end{aligned} \right\} \quad \text{für } t \in [0, 1] \quad (77)$$

mit der Lösung $x = x(t, s_k, T_k, \lambda)$, $T = T(t, s_k, T_k, \lambda)$ auf $[0, 1]$. Zusammen mit der Phasenbedingung (50) definieren wir die $n + 1$ Funktionen g und h durch

$$\begin{aligned} g(s_k, T_k, \lambda) &:= x(1; s_k, T_k, \lambda) - s_k \\ h(s_k, T_k, \lambda) &:= f(s_0, \lambda)^T (s_k - s_0), \end{aligned} \quad (78)$$

deren Nullstellen (s^*, T^*) mit einem Newton-ähnlichen Verfahren zu ermitteln sind. Wie im vorigen Abschnitt führen wir die Notation xx, ss, ff etc. für Vektoren in \mathbb{R}^{n+1} mit

$$xx := \begin{pmatrix} x \\ T \end{pmatrix}, \quad ss := \begin{pmatrix} s \\ T \end{pmatrix}, \quad ff(xx) := \begin{pmatrix} Tf(x, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad ff : DD \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

ein und notieren das AWP (77) in der kompakten Form

$$\dot{xx} = ff(xx, \lambda), \quad xx(0, ss_k, \lambda) = ss_k \quad (79)$$

mit vorausgesetzter Lösung $xx = xx(t, ss_k, \lambda)$. Definieren wir nun die Abbildung gg durch

$$gg(ss_k, \lambda) := \begin{pmatrix} g(s_k, T_k, \lambda) \\ h(s_k, T_k, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1; s_k, T_k, \lambda) - s_k \\ f(s_0, \lambda)^T (s_k - s_0) \end{pmatrix} \quad (80)$$

so ergibt sich das zu lösende System als Fortsetzungsproblem in \mathbb{R}^{n+1}

$$gg(ss, \lambda) = 0, \quad gg : DD \times \Lambda \rightarrow DD, \quad DD \subset \mathbb{R}^{n+1}. \quad (81)$$

Gesucht ist eine Funktion $ss = ss(\lambda)$, $ss : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, mit $gg(ss(\lambda), \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Diese Standardaufgabe lösen wir bequem mit den Fortsetzungsmethoden aus Vogt (2010), wobei wir uns auf die natürliche Parametrisierung bezüglich λ konzentrieren wollen. Wir passen dazu den Grundalgorithmus unserer Problemstellung an:

1. **Prädiktorschritt:** Da die Ableitungen $D_{(ss)}gg(ss, \lambda)$ und $D_\lambda gg(ss, \lambda)$ nur mit großem Aufwand über das Variationssystem zu bestimmen sind, ist der Tangenten-Prädiktor nicht zu empfehlen. Besser geeignet sind der
 - Basis-Prädiktor für den ersten Fortsetzungsschritt ($j = 1$):

$$ss^P := ss_{j-1} = ss(\lambda_{j-1}) \quad \text{und der} \quad (82)$$

- Sekanten-Prädiktor für die weiteren Fortsetzungsschritte ($j \geq 2$):

Mit den 2 berechneten Knoten $(ss_{j-2}, \lambda_{j-2})$ und $(ss_{j-1}, \lambda_{j-1})$ gewinnen wir

$$ss^P := ss_{j-1} + \frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{\lambda_{j-1} - \lambda_{j-2}} (ss_{j-1} - ss_{j-2}). \quad (83)$$

2. **Korrektorschritt:** Mit dem Startpunkt ss^P lösen wir das erweiterte System (81) in \mathbb{R}^{n+1} mit einem Newton-ähnlichem Verfahren mit approximierter Jacobi-Matrix $D_{(ss)}gg(ss, \lambda)$. Dazu greifen wir auf Algorithmus 16 (Schießverfahren ohne Variationssystem) zurück und bauen dessen Schritt 1 komplett als Korrektor-Verfahren in den Algorithmus 38 zur *numerischen Fortsetzung periodischer Orbits im autonomen Fall* ein. Natürlich sind darin die Vektoren s_k, x, f, g durch die erweiterten Vektoren ss_k, xx, ff, gg zu ersetzen!

Durchführbarkeit und Konvergenz von Algorithmus 38 lassen sich – allerdings mit beträchtlichem theoretischen Aufwand – nachweisen. Erschwerend ist, dass die Voraussetzungen (z. B. Glattheit) für das Vektorfeld f , nicht aber für die Funktion gg in (81) vorliegen.

Satz 39

Voraussetzungen 37 seien erfüllt sowie folgende Annahmen:

- i. Die periodische Lösung $x^*(t, \lambda)$ ist nicht-entartet für alle $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$.
- ii. Der Startwert $ss_0 = (s_0, T_0)$ von Algorithmus 38 liegt hinreichend nahe bei $ss(a) = (s(a), T(a))$, $a = \lambda_0$.

ALGORITHMUS 38 (Fortsetzung periodischer Orbits)

Function $[N, \lambda, \mathbf{ss}, m] = \text{contperiodauto}(f, a, b, s_0, T_0, \text{tol}, k_{\max})$

1. Setze $j := 0$, $\lambda_0 := a$, $\mathbf{ss}^P := \mathbf{ss}_0 = (s_0, T_0)$.
Wähle Fortsetzungsschrittweite h sowie Iterationszahl k_{opt} .
2. (Startrechnung)
Bestimme $\mathbf{ss}_0 = \mathbf{ss}(\lambda_0) = (s(\lambda_0), T(\lambda_0))$ mit Alg. 16, Schritt 1.
3. Do while $\lambda_j \leq b$
 - 3.1. Setze $j := j + 1$.
 - 3.2. Setze $\lambda_j := \lambda_{j-1} + h$. Falls $\lambda_j > b$, so $\lambda_j := b$.
 - 3.3. (Prädiktor)
Bestimme \mathbf{ss}^P mit den Formeln (82) und (83).
 - 3.4. (Korrektor)
Bestimme $\mathbf{ss}_j = \mathbf{ss}(\lambda_j)$ mit Algorithmus 16, Schritt 1,
in k Schritten bis auf eine Genauigkeit tol .
 - 3.5. (Schrittweiten-Bestimmung)
 - (a) Bestimme $\rho := k_{\text{opt}}/k$.
 - (b) Beschränke $\rho := \max\{\min(\rho, 2), \frac{1}{2}\}$.
 - (c) Setze $h := h * \rho$.
 - (d) Falls $h < \varepsilon_M$ (Maschinengenauigkeit), so STOP.
 - 3.6. (Monodromiematrix) Setze $GG := D_{(\mathbf{ss})}\mathbf{gg}(\mathbf{ss}_j, \lambda_j)$ und reduziere um
die $(n+1)$ -te Zeile und Spalte $\Rightarrow G$. Setze $M(\lambda_j) := G + I_n$ und
bestimme die Eigenwerte $m(\lambda_j) = (m_1(\lambda_j), m_2(\lambda_j), \dots, m_n(\lambda_j))$.
7. Return $N := j$, λ_j , \mathbf{ss}_j , $m(\lambda_j)$, $j = 0(1)N$.

Dann existiert ein $h_{\max} > 0$, so dass für alle Schrittweiten $h_j := \lambda_j - \lambda_{j-1} < h_{\max}$ der Algorithmus durchführbar ist, d. h. zu $j = 0, 1, 2, \dots$ existieren λ_j und $\mathbf{ss}(\lambda_j)$ mit

$$\mathbf{gg}(\mathbf{ss}(\lambda_j), \lambda_j) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei $\mathbf{ss}(\lambda_j)$ reguläre Lösung von (81) ist. Der Algorithmus ist endlich, d. h. $\lambda_N = b$ für ein $N \in \mathbb{N}$.

Beweisidee: Es sei $\lambda_{j-1} \in \Lambda_\varepsilon$, $j \geq 1$ fest vorgegeben. Zur Lösung von $\mathbf{gg}(\mathbf{ss}, \lambda_{j-1}) = 0$ im Korrektorschritt verifiziert man die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes des benutzten Newton-ähnlichen Verfahrens, d. h. $\mathbf{gg} \in C^r(DD \times \Lambda_\varepsilon)$, $r \geq 2$ und $\mathbf{gg}_{\mathbf{ss}}(\mathbf{ss}, \lambda)$ regulär für alle $(\mathbf{ss}, \lambda) \in \mathcal{U}_\delta(\mathbf{ss}(\lambda)) \times \Lambda_\varepsilon$. Ist die Fortsetzungsschrittweite h_j hinreichend klein, so kann garantiert werden, dass der Prädiktorwert \mathbf{ss}^P in dieser Umgebung $\mathcal{U}_\delta(\mathbf{ss}(\lambda))$ liegt. Anwendung des entsprechenden Satzes aus Vogt (2010) liefert eine hin-

reichende Schrittweitschranke h_{\max} . Wählt man also die Startnäherung $ss_0 = (s_0, T_0)$ des ersten Fortsetzungsschrittes mit $ss_0 \in \mathcal{U}_\delta(ss(\lambda))$ und die konstante Schrittweite $h_j := \frac{1}{2}h_{\max}$, so konvergiert die Korrektoriteration in jedem Fortsetzungsschritt. Zudem erreicht man das rechte Intervallende b in endlich vielen Schritten. \square

Bemerkung 40

1. Für periodisch erregte parameterabhängige Systeme

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \quad t \in [0, T], \quad \lambda \in \Lambda \quad (84)$$

lautet das zu (81) analoge Gleichungssystem als Fortsetzungsproblem in \mathbb{R}^n

$$g(s, \lambda) = 0, \quad g : D \times \Lambda \rightarrow D, \quad D \subset \mathbb{R}^n. \quad (85)$$

Algorithmus 38 und Konvergenzsatz 39 lassen sich dafür leicht anpassen.

2. Wie für Gleichgewichtslagen in Vogt (2010) behandelt, sind auch zur Lösung von (81) weitere Parametrisierungen möglich. Empfohlen werden Parametrisierungen mittels

- Pseudo-Bogenlänge bzw.
- Gauß-Newton-Fortsetzung .

Die Angabe von Konvergenzbedingungen anhand der ursprünglich gegebenen Differenzialgleichungen $\dot{x} = f(x, \lambda)$ ist allerdings auch hier nicht trivial. \blacksquare

Zur numerischen Stabilitätsanalyse nutzen wir den Satz 28 von Andronov & Witt in jedem Fortsetzungsschritt und ergänzen Schritt 3 in Algorithmus 38 durch den Teilschritt:

3.7. (Stabilitätsanalyse) Es sei $m_k(\lambda_j) = 1$ der Hauptmultiplikator.

Setze $\varrho := \max\{|m_i(\lambda_j)| \mid i \neq k, i = 1(1)n\}$.

Falls $\varrho < 1$, so „ASYMPTOTISCH STABIL“,

sonst falls $\varrho > 1$, so „INSTABIL“,

sonst „KEINE AUSSAGE MÖGLICH“.

Bei periodisch erregten Systemen (84) ermitteln wir den Spektralradius ϱ über alle n charakteristischen Multiplikatoren $m_i(\lambda_j)$.

Beispiel 41

1. Für das 2-fach subharmonisch reagierende System von E. Philippow und W. Büntig aus Beispiel 9

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x} + 2bx\dot{x} + x = \hat{B} \sin 2t, \quad b = \hat{B} = 1 \quad (86)$$

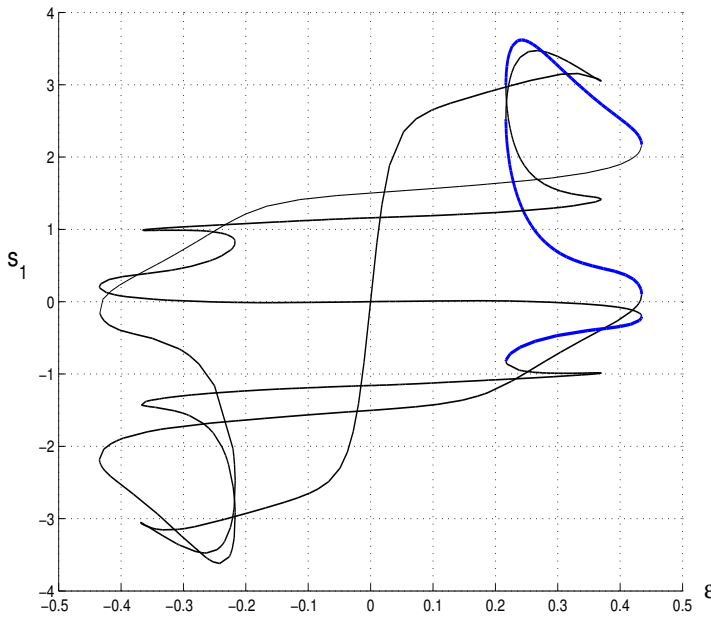


Abb. 19
 (ε, s_1) -Diagramm
 mit Stabilitätsver-
 halten der periodi-
 schen Lösungen

mit Kontrollparameter $\varepsilon \in \mathbb{R}$ konnte bereits eine 3-fach subharmonische Systemantwort ermittelt werden (vgl. Beispiel 19). Dazu nutzen wir die Parametrisierung mittels Pseudo-Bogenlänge und führen nun zusätzlich eine Stabilitätsanalyse durch. Der Anfangswert $s_1 = x_1(0)$ dieser 3π -periodischen Lösung ist in Abhängigkeit vom Parameter ε in Abbildung 19 dargestellt. Asymptotisch stabile Werte sind blau, während instabile Lösungen schwarz gezeichnet sind.

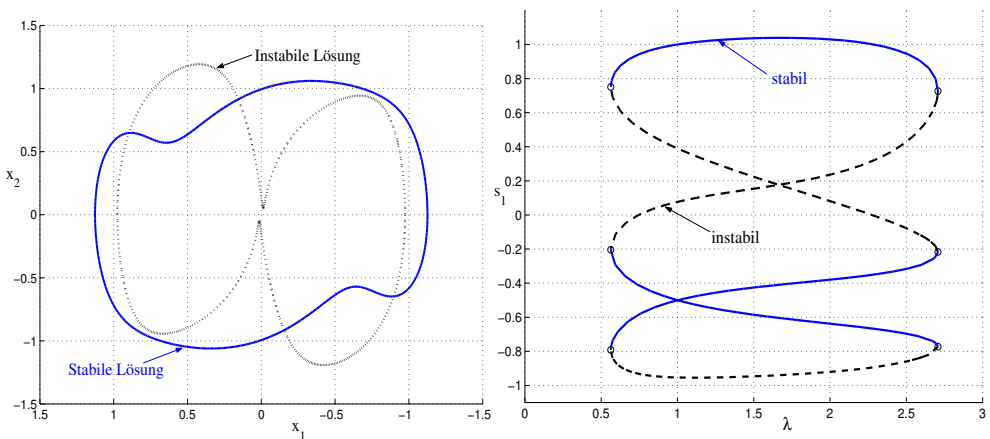


Abb. 20 2π -periodische Lösungen für $\lambda = 1.88$ (links) und (λ, s_1) -Lösungsdiagramm (rechts)

2. Philippow und Bütting (1992) entwickelten auch eine Modellgleichung eines dreifach subharmonisch reagierenden Systems der Elektrotechnik

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x} + x + b(4x^3 - 3x) = \hat{B} \cos 3t \quad (87)$$

mit festen Parametern $b = 1.0$ und $\varepsilon = 3.0$, worin nun die Erregungsamplitude $\lambda := \hat{B}$ als Kontrollparameter dient. Neben $\frac{4}{3}\pi$ -periodischen Lösungen besitzt das System (mit $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$) auch 2π -periodische Lösungen, z. B. für $\lambda = 1.88$ die in Abbildung 20 links dargestellte stabile und instabile Lösung. Eine Parameterverfolgung des Anfangs-

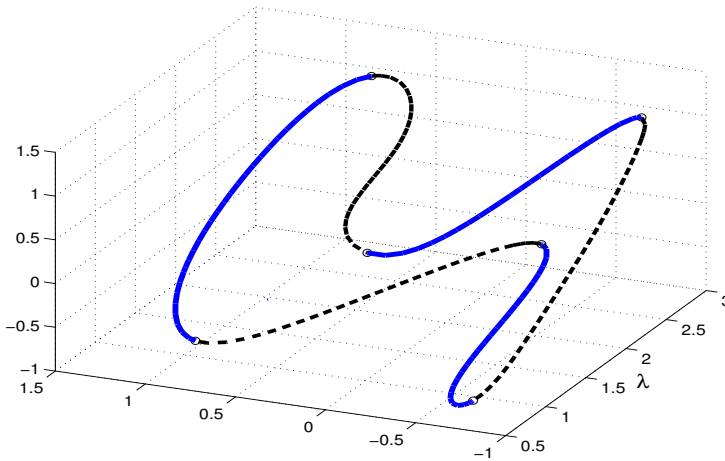


Abb. 21
 (λ, s_1, s_2) -Diagramm
 mit Stabilitätsverhal-
 ten der 2π -periodi-
 schen Lösungen (blau
 – stabil, schwarz –
 instabil)

wertes $s_1 = x_1(0)$ dieser 2π -periodischen Lösung ist in Abhängigkeit vom Parameter λ in Abbildung 20 rechts dargestellt. Die geschlossene Lösungskurve ist übrigens doppel-punktfrei, was man besser an ihrem 3D-Diagramm der Abbildung 21 im (λ, s_1, s_2) -Raum mit den Anfangswerten $s_1 = x_1(0)$, $s_2 = x_2(0)$ erkennen kann. ■

5.2 Bifurkationen periodischer Orbits

Wir betrachten nachfolgend parameterabhängige periodisch erregte Systeme

$$\dot{x} = f(x, t, \lambda), \quad (x, t, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \quad (88)$$

mit zugehörigem Fluss $\varphi_t(x; \lambda)$. Autonome Systeme (76) können analog zu vorigem Abschnitt untersucht werden. Jeder Parameterwert λ^* , für den der Fluss $\varphi_t(x; \lambda^*)$ *nicht strukturell stabil* ist, stellt gemäß Theorie einen Bifurkationswert für λ dar.

Für jeden betrachteten Parameterwert $\lambda \in \Lambda = [a, b]$ wollen wir einen isolierten periodischen Orbit (Grenzzykel) voraussetzen, der die Periode $T = 2\pi$ besitzt. Nach Abschnitt 4 existiert dazu eine λ -abhängige stroboskopische Abbildung als global definierte Poincaré-

Abbildung $P : D \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$. Dem 2π -periodischen Orbit $\varphi_t(x^*(\lambda); \lambda)$ entspricht dann der Fixpunkt $x^*(\lambda)$ von

$$x = P(x, \lambda), \quad (x, \lambda) \in D \times \Lambda \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (89)$$

und umgekehrt. Das Stabilitätsverhalten von $x^*(\lambda)$ wird vollständig durch die n Eigenwerte $m_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, der Poincaré-Matrix $D_x P(x^*(\lambda), \lambda)$, also durch die charakteristischen Multiplikatoren bestimmt.

Definition 42 (Hyperbolizität)

Bei festem λ heißt ein Fixpunkt $x^*(\lambda)$ von P bzw. eine periodische Lösung von (88) mit den n Eigenwerten $m_i(\lambda)$ von $D_x P(x^*(\lambda), \lambda)$

- *hyperbolisch*, falls $|m_i(\lambda)| \neq 1$ für $i = 1(1)n$,
- *nicht-entartet*, falls $m_i(\lambda) \neq 1$ für $i = 1(1)n$

gilt. Ein hyperbolischer Fixpunkt $x^*(\lambda)$ heißt

- *Senke*, falls $|m_i(\lambda)| < 1$ für $i = 1(1)n$,
- *Quelle*, falls $|m_i(\lambda)| > 1$ für $i = 1(1)n$,
- *Sattel* in allen anderen Fällen.

Notwendig für eine lokale Bifurkation an einem Parameterwert λ^* ist dann die Nicht-Hyperbolizität des Fixpunktes $x^* = x^*(\lambda^*)$, d. h. für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ ist $|m_i(\lambda^*)| = 1$. Verschiebt man den Bifurkationspunkt (x^*, λ^*) in den Nullpunkt – das ist zumindest theoretisch leicht möglich – so lautet die Gleichung am Bifurkationswert nun $P(0, 0) = 0$. Wir erinnern daran, dass nach Guckenheimer und Holmes (1983), Kapitel 1.4., die Jacobi-Matrix $B = D_x P(0, 0)$ die invarianten (stabilen, zentralen und instabilen) Unterräume

- $E_s = \text{span}\{n_s \text{ verallgemeinerte Eigenvektoren zu Eigenwerten mit } |m_i(0)| < 1\}$
- $E_c = \text{span}\{n_c \text{ verallgemeinerte Eigenvektoren zu Eigenwerten mit } |m_i(0)| = 1\}$
- $E_u = \text{span}\{n_u \text{ verallgemeinerte Eigenvektoren zu Eigenwerten mit } |m_i(0)| > 1\}$

der Dimensionen $n_s \geq 0$, $n_c \geq 0$, $n_u \geq 0$ besitzt. Analog zum Fall der Fixpunkte von Flüssen existiert der folgende grundlegende *Reduktionssatz von A. N. Shoshitaishvili für Abbildungen*, den wir hier in der Darstellung von Reitmann (1996) zitieren:

Satz 43 (Reduktionssatz für Abbildungen)

P sei ein C^r -Diffeomorphismus mit $r \geq 1$ und $P(0, 0) = 0$. $D_x P(0, 0)$ habe invariante Unterräume E_s, E_c, E_u der Dimensionen $n_s \geq 0$, $n_c \geq 0$, $n_u \geq 0$ mit $n_s + n_c + n_u = n$. Dann gilt:

- i. P ist nahe $(0, 0)$ topologisch äquivalent dem Fixpunktproblem

$$\begin{aligned} u &= g(u, \lambda) = A_c u + h(u, \lambda), \\ v &= A_s v, \\ w &= A_u w \end{aligned} \quad (90)$$

- mit $u \in \mathbb{R}^{n_c}$, $v \in \mathbb{R}^{n_s}$, $w \in \mathbb{R}^{n_u}$.
- ii. h ist eine C^r -Abbildung mit $h(0,0) = 0$ und $D_u h(0,0) = 0$.
 - iii. A_c, A_s, A_u sind Matrizen der Dimensionen $n_c \times n_c$, $n_s \times n_s$ und $n_u \times n_u$ mit den zu E_c, E_s, E_u gehörenden Eigenwerten von $D_x P(0,0)$.

Um unnötige neue Bezeichnungen zu vermeiden, nennen wir den um λ^* verschobenen Parameter wiederum λ , während sich der Phasenraum-Vektor nun aus den drei Komponenten (u, v, w) zusammensetzt. Wegen der Definition 42 ist der Fixpunkt $(0,0)$ hyperbolisch, falls die Dimension $n_c = 0$ ist. Ist zusätzlich $n_u = 0$ ($n_s = 0$), so bildet $(0,0)$ eine Senke (Quelle). Lokale Bifurkationen sind deshalb nur möglich, wenn der zentrale Unterraum E_c nichttrivial ist. Man bezeichnet die Menge

$$W_{loc}^c(0) = \{(u, v, w) \mid v = 0, w = 0\}$$

als *lokale Zentrumsmannigfaltigkeit*. Die auf $W_{loc}^c(0)$ reduzierte Poincaré-Abbildung ergibt sich aus (90) als Fixpunktgleichung für $g : \mathbb{R}^{n_c} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$

$$u = g(u, \lambda) \quad \text{mit} \quad g(u, \lambda) = A_c u + h(u, \lambda). \quad (91)$$

Wegen der Bedingungen ii. des Satzes enthält $h(u, \lambda)$ den nichtlinearen Anteil von $g(u, \lambda)$.

Beispiel 44

Die parameterabhängige Poincaré-Abbildung $P : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 - \omega x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \omega x_1 + \lambda x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und Konstanten} \quad \omega = 0.1, \alpha = 0.995$$

besitzt für alle reellen λ den Fixpunkt $x^*(\lambda) = (0, 0, 0)^T$, so dass keine x -Verschiebung nötig ist. Setzen wir $\lambda^* = \sqrt{1 - \omega^2} = \sqrt{99}/10 = 0.9949874371 \dots$, so hat nach Parameterverschiebung die Poincaré-Abbildung

$$P(x, \lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda + \lambda^*)x_1 - \omega x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \omega x_1 + (\lambda + \lambda^*)x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ \alpha x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda^* = 0.9949874371 \dots$$

den Fixpunkt $0 = P(0,0)$. Die zugehörige Jacobi-Matrix und ihre Eigenwerte sind

$$B = D_x P(0,0) = \begin{pmatrix} \lambda^* & -\omega & 0 \\ \omega & \lambda^* & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} m_1(0) &= \lambda^* + i\omega \\ m_2(0) &= \lambda^* - i\omega \\ m_3(0) &= \alpha. \end{array}$$

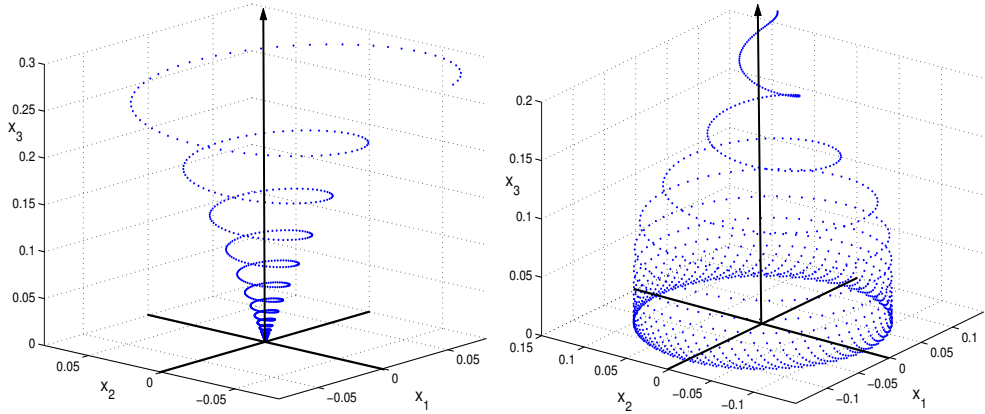


Abb. 22 Abbildungspunkte (x^k) des Beispiels 44 für $\lambda = -0.004987$ (links) und $\lambda = 0.015013$ (rechts)

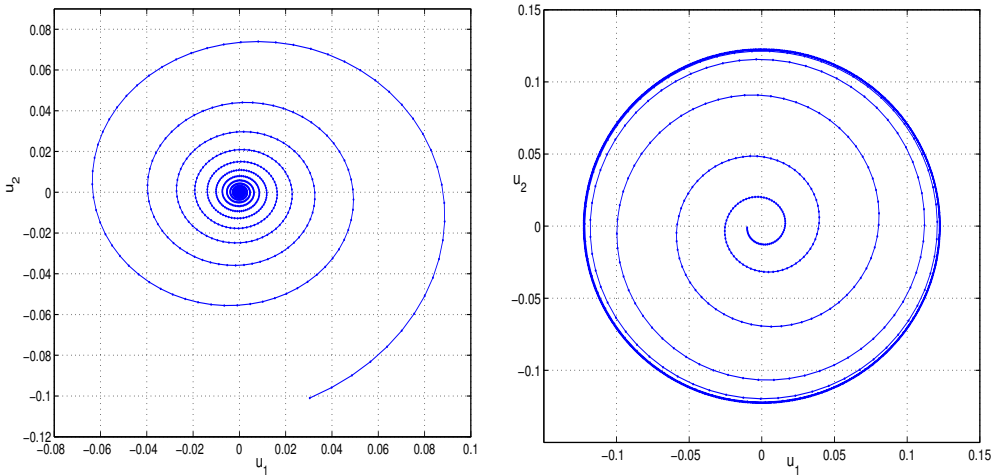


Abb. 23 Abbildungspunkte $(u^k) \in E_c$ des Beispiels 44 für $\lambda = -0.004987$ (links) und $\lambda = 0.015013$ (rechts)

Wegen $|m_{1,2}(0)| = 1$ und $|m_3(0)| = 0.995 < 1$ besitzen die invarianten Unterräume die Dimensionen $n_c = \dim E_c = 2$, $n_s = \dim E_s = 1$ und $n_u = \dim E_u = 0$. In Abbildung 22 werden Punktfolgen (x^k) , $k = 0, 1, 2, \dots$ mit $x^k = P(x^{k-1}, \lambda)$ für die Parameterwerte $\lambda = -0.004987$ (links) und $\lambda = 0.015013$ (rechts) dargestellt. Die Zerlegung (90) liegt mit den Bezeichnungen $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$, $v_1 = x_3$ bereits vor, weshalb die auf E_c reduzierte Poincaré-Abbildung nun

$$u = g(u, \lambda) \quad \text{mit} \quad g(u, \lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda + \lambda^*)u_1 - \omega u_2 - u_1(u_1^2 + u_2^2) \\ \omega u_1 + (\lambda + \lambda^*)u_2 - u_2(u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix}$$

lautet. Wegen $g(u, \lambda) = A_c u + h(u, \lambda)$ mit der Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} \lambda^* & -\omega \\ \omega & \lambda^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(u, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda u_1 - u_1(u_1^2 + u_2^2) \\ \lambda u_2 - u_2(u_1^2 + u_2^2) \end{pmatrix}$$

sind alle Bedingungen des Reduktionssatzes erfüllt. Die Punktfolgen (u^k) , $k = 0, 1, 2, \dots$ der auf E_c reduzierten Poincaré-Abbildung sieht man in Abbildung 23. ■

In praktischen Aufgabenstellungen ist eine derartige Reduktion auf die Zentrumsmannigfaltigkeit in der Regel nicht angebar oder wegen der Problemgröße nicht durchführbar. Als einziges praktikables Hilfsmittel dient dann die Beobachtung der charakteristischen Multiplikatoren $m_i(\lambda)$, $i = 1(1)n$, der Poincaré-Abbildung $P(x, \lambda)$ bei Änderung des Kontrollparameters λ . Nicht-Hyperbolizität des Fixpunktes $x^*(\lambda)$ wird für einen Parameterwert λ^* offenbar in folgenden drei *generischen Fällen* eintreten (Zum Begriff der Generizität sei auf Reitmann (1996) verwiesen):

- $m_i(\lambda^*) = +1 \implies$ (reelle) Fold-Bifurkation
- $m_i(\lambda^*) = -1 \implies$ (reelle) Flip-Bifurkation
- $m_i(\lambda^*) \overline{m_i(\lambda^*)} = 1$, $m_i(\lambda^*) \notin \mathbb{R} \implies$ (komplexe) Hopf-Bifurkation.

Man beachte dabei, dass nicht-reelle Eigenwerte stets als konjugiert komplexe Paare auftreten. Das unterschiedliche Verhalten in diesen drei Fällen wird klar, wenn wir nun die auf $W_{loc}^c(0)$ reduzierte Poincaré-Abbildung (101) untersuchen. Wir benutzen hierbei die Notation aus Reitmann (1996) und die Darstellungsweise von Anishchenko (1987).

(1a) Fold-Bifurkation (Sattel-Knoten-Bifurkation)

Taylor-Entwicklung der Funktion $g(x, \lambda)$ aus (90) ergibt $g(x, \lambda) = x + \alpha\lambda + \beta x^2 + \dots$ mit

$$g(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = m_i(0) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) = \alpha \neq 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = \beta \neq 0.$$

In diesem ersten Fall setzen wir voraus, dass $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$. Ist $\alpha\beta < 0$, so hat $P(x, \lambda)$ für $\lambda > 0$ zwei Fixpunkte, für $\lambda = 0$ einen Fixpunkt und für $\lambda < 0$ keinen Fixpunkt. Bei $(0, 0)$ tritt eine *superkritische Fold-Bifurkation* ein. Ist $\alpha\beta > 0$, so hat $P(x, \lambda)$ für $\lambda < 0$ zwei Fixpunkte, für $\lambda = 0$ einen Fixpunkt und für $\lambda > 0$ keinen Fixpunkt, weshalb hier eine sogenannte *subkritische Fold-Bifurkation* eintritt. In Analogie zu den Gleichgewichtslagen aus Vogt (2010) nennt man diese Verzweigung oft auch *Sattel-Knoten-Bifurkation*. Sie stellt den generischen Fall dar, wenn ein Multiplikator $m_i(0) = 1$ algebraisch einfacher Eigenwert von $D_x P(0, 0)$ ist.

Beispiel 45

Wir betrachten die in den Ursprung $(0, 0)$ transformierte Abbildung

$$g(x, \lambda) = x + \lambda - x^2 \quad \text{mit} \quad (x^*, \lambda^*) = (0, 0).$$

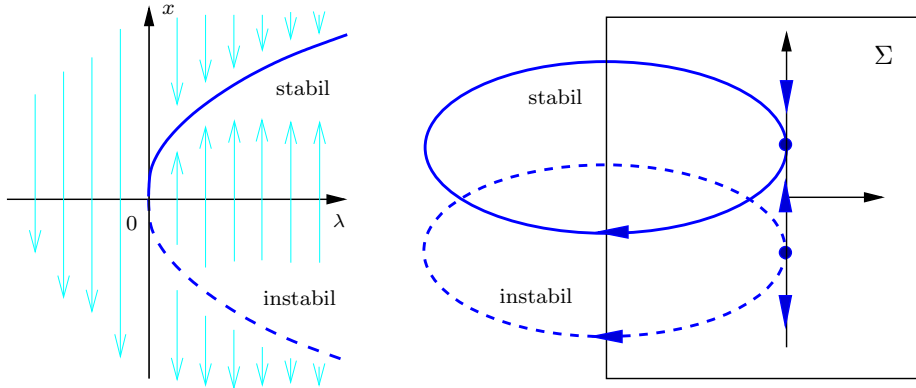


Abb. 24 Superkritische Fold-Bifurkation (links) und periodische Lösungen für $\lambda > \lambda^*$ (rechts)

Offenbar ist hier $\alpha = 1, \beta = -1$, weshalb bei (x^*, λ^*) eine superkritische Fold-Bifurkation vorliegt (vgl. Abb. 24 links). Für Parameterwerte $\lambda > \lambda^*$ liegen zwei periodische Lösungen vor, die in Abbildung 24 (rechts) mit ihren Poincaré-Abbildungen veranschaulicht werden. ■

(1b) Transkritische Bifurkation

Taylor-Entwicklung von $g(x, \lambda)$ liefert nun $g(x, \lambda) = x + \alpha\lambda x + \beta x^2 + \dots$ mit

$$g(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x}(0, 0) = \alpha \neq 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = \beta \neq 0.$$

Hier tritt bei $(0, 0)$ eine *transkritische Bifurkation* ein, die häufig mit einem Stabilitätswechsel verbunden ist. Im Gegensatz zu Fall (1a) tritt diese nicht-generische Bifurkation höherer Ordnung seltener in praktischen Anwendungen auf.

Beispiel 46

Die in den Ursprung $(0, 0)$ transformierte Abbildung laute

$$g(x, \lambda) = x + \lambda x - x^2 - \lambda x^2 \quad \text{mit} \quad (x^*, \lambda^*) = (0, 0).$$

Wir stellen fest, dass $\alpha = 1, \beta = -1$ ist und so bei (x^*, λ^*) eine transkritische Bifurkation mit Stabilitätswechsel eintritt, die in Abbildung 25 (links) dargestellt ist. ■

(1c) Heugabel-Bifurkation

Taylor-Entwicklung von $g(x, \lambda)$ in (90) ergibt nun $g(x, \lambda) = x + \alpha\lambda x + \beta x^3 + \dots$ mit

$$g(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) = 0 \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x}(0, 0) = \alpha \neq 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, 0) = \beta \neq 0.$$

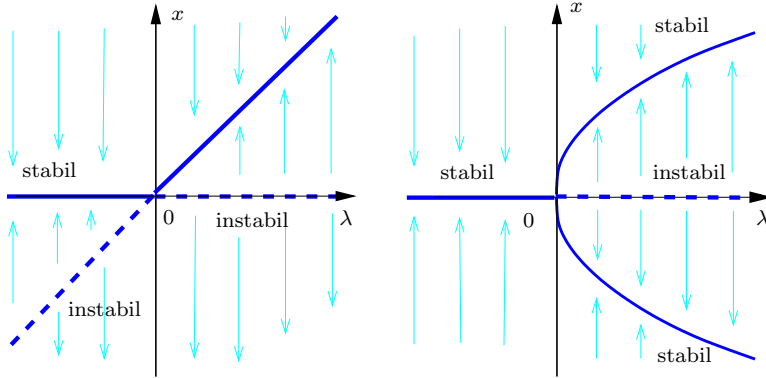


Abb. 25 Transkritische Bifurkation (links) und Heugabel-Bifurkation (rechts)

Am Bifurkationspunkt $(x^*, \lambda^*) = (0, 0)$ liegt in diesem Falle eine *Heugabel-Bifurkation* (*pitchfork bifurcation*) vor, bei der ebenfalls der superkritische vom subkritischen Fall unterschieden wird. Diese nicht-generische Bifurkation höherer Ordnung tritt in praktischen Anwendungen mitunter auf, besonders wenn das dynamische System Symmetrien enthält.

Beispiel 47

Die transformierte Abbildung sei nun

$$g(x, \lambda) = x + \lambda x - x^3 \quad \text{mit} \quad (x^*, \lambda^*) = (0, 0).$$

Auch hier lauten die Koeffizienten $\alpha = 1$, $\beta = -1$, weshalb bei (x^*, λ^*) die in Abbildung 25 rechts dargestellte superkritische Heugabel-Bifurkation vorliegt. Bei wachsendem λ „übergibt“ die triviale Lösung $x^* = 0$ ihre Stabilität bei $\lambda^* = 0$ an die abzweigende Lösung. ■

(2) Flip-Bifurkation (Periodenverdopplung, subharmonische Bifurkation)

Wir nehmen nun mit $m_i(0) = -1$ die Taylor-Entwicklung von $g(x, \lambda)$ in (90) vor:

$$g(x, \lambda) = -x + \alpha\lambda x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

mit

$$g(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = m_i(0) = -1 \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial x}(0, 0) = \alpha, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = \beta, \quad \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}(0, 0) = \gamma.$$

In diesem zweiten generischen Fall setzen wir voraus, dass $\alpha \neq 0$ und $\beta^2 + \gamma \neq 0$ ist. Dann gilt: Ist $\alpha(\beta^2 + \gamma) < 0$, so hat $P(x, \lambda)$ für $\lambda < 0$ genau einen Fixpunkt und für $\lambda > 0$ genau einen Fixpunkt sowie zwei Fixpunkte x^{**} der Periode 2, d. h. $x^{**} = P(P(x^{**}, \lambda), \lambda)$. Bei Durchlaufen des Bifurkationspunktes $(0, 0)$ tritt eine *periodenverdoppelnde Bifurkation* (*flip bifurcation*) ein. Ist $\alpha(\beta^2 + \gamma) > 0$, so hat $P(x, \lambda)$ für $\lambda > 0$ genau einen Fixpunkt und für $\lambda < 0$ einen Fixpunkt sowie zwei Fixpunkte x^{**} der Periode 2.

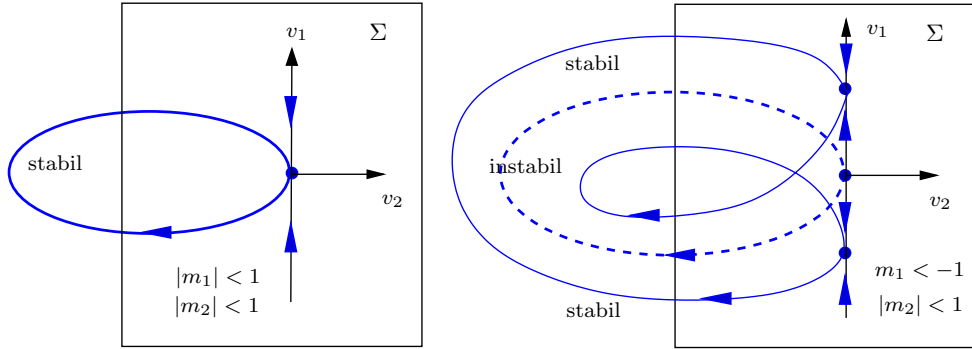


Abb. 26 Flip-Bifurkation: Eine T -periodische Lösung für $\lambda < \lambda^*$ (links) und zusätzlich eine $2T$ -periodische Lösung für $\lambda > \lambda^*$ (rechts)

Beispiel 48

Die in den Ursprung $(0, 0)$ transformierte Abbildung laute

$$g(x, \lambda) = -x - \lambda x + x^3 \quad \text{mit} \quad (x^*, \lambda^*) = (0, 0).$$

Wegen $\alpha = -1$, $\beta = 0$ und $\gamma = 1$ ist $\alpha(\beta^2 + \gamma) = -1 < 0$, weshalb bei (x^*, λ^*) eine Flip-Bifurkation eintritt. Abbildung 26 zeigt links die stabile periodische Lösung für Parameterwerte $\lambda < \lambda^*$, während rechts die nunmehr instabile Lösung sowie die Lösung mit doppelter Periode $2T$ dargestellt ist. Man erkennt leicht, dass die Poincaré-Abbildung nun zwei Fixpunkte der Periode 2 besitzt. ■

Betrachten wir das obige System von W. F. Langford

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_3 - 0.7)x_1 - \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + (x_3 - 0.7)x_2 \\ \dot{x}_3 &= 0.6 + x_3 - x_3^3/3 - (x_1^2 + x_2^2)(1 + \varrho x_3) + \varepsilon x_3 x_1^3. \end{aligned} \tag{92}$$

Mit den Konstanten $\omega = 3.5$, $\varrho = 0.25$, $\beta = 0.7$ und dem Kontrollparameter ε erhalten wir die in Abbildung 27 dargestellten Lösungen. Zwischen $\varepsilon = 0.03$ und $\varepsilon = 0.06$ tritt eine erste Flip-Bifurkation auf; die nächsten Periodenverdopplungen einer Flip-Bifurkationskaskade liegen vor den Werten $\varepsilon = 0.0675$ und $\varepsilon = 0.07$.

(3) Torus-Bifurkation (Neimark-Sacker-Bifurkation)

Dieser Bifurkationstyp wird mitunter als *Hopf-Bifurkation für Poincaré-Abbildungen* bezeichnet. Das reduzierte System $x = g(x, \lambda)$ in (101) ist nun 2-dimensional. Die Jacobi-Matrix $D_x P(x^*, \lambda^*)$ hat ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $m_i(\lambda^*)$ und $\overline{m_i(\lambda^*)}$ mit $|m_i(\lambda^*)| = 1$ und $n - 2$ charakteristische Multiplikatoren, die nicht auf dem Einheitskreis liegen. Es gilt das folgende *Bifurkations-Theorem von Neimark-Sacker für periodische Orbits* (vgl. Reitmann (1996)):

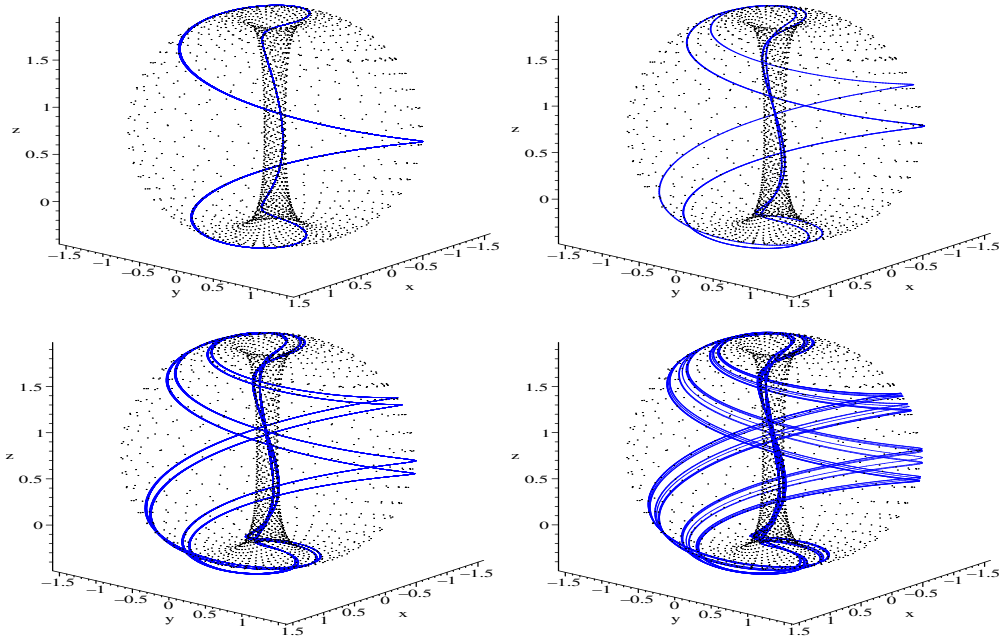


Abb. 27 Langford-System des Beispiels 26: Parameterwerte sind $\varepsilon = 0.03$ (links oben), $\varepsilon = 0.06$ (rechts oben), $\varepsilon = 0.0675$ (links unten) und $\varepsilon = 0.07$ (rechts unten)

Satz 49 (Neimark & Sacker)

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

- i. $D_x P(0, 0)$ habe zwei Eigenwerte $m_1 = m(0)$ und $m_2 = \overline{m(0)}$ mit $|m(0)| = 1$ und $n - 2$ Eigenwerte $|m_i(0)| \neq 1$, $i = 3, 4, \dots, n$.
- ii. $g \in C^6$ und $g(0, \lambda) = 0$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$.
- iii. $D_x g(0, \lambda)$ hat die Eigenwerte $m(\lambda)$ und $\overline{m(\lambda)}$ für alle $\lambda \in \mathcal{U}(0)$ mit

$$d := \frac{d}{d\lambda} |m(\lambda)|_{\lambda=0} \neq 0. \quad (93)$$

- iv. $m(0)$ ist keine j -te Wurzel aus 1 mit $j < 5$, d. h. $m(0)^j \neq 1$ für $j = 1, 2, 3, 4$.

Dann gelten folgende Behauptungen:

- i. Es existiert eine glatte Transformation in Polarkoordinaten, die (90) nahe $(0, 0)$ in die Form

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r + d\lambda r + \sigma r^3 + \dots \\ \theta + |\arg m(0)| + br^2 + \dots \end{pmatrix} \quad (94)$$

mit reellen Parametern b, σ überführt.

- ii. Ist $\sigma \neq 0$, so tritt bei $\lambda^* = 0$ eine *Torus-Bifurkation* für P ein. Für $\lambda < 0$ existiert der triviale Fixpunkt $x^* = 0$, während für $\lambda > 0$ in der Umgebung dieses Fixpunktes eine geschlossene Invarianzkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ für die Abbildung P liegt.

- iii. Ist $\sigma < 0$, so heißt die Torus-Bifurkation für $\lambda > 0$ superkritisch, bei $\sigma > 0$ liegt eine subkritische Torus-Bifurkation für $\lambda > 0$ vor.

Das komplizierte Verhalten der Lösungen für $\lambda > 0$ wird durch Abbildung 28 veranschaulicht: Die bei $x \in \Gamma$ startende Lösung windet sich um die instabile triviale Lösung $x^* = 0$

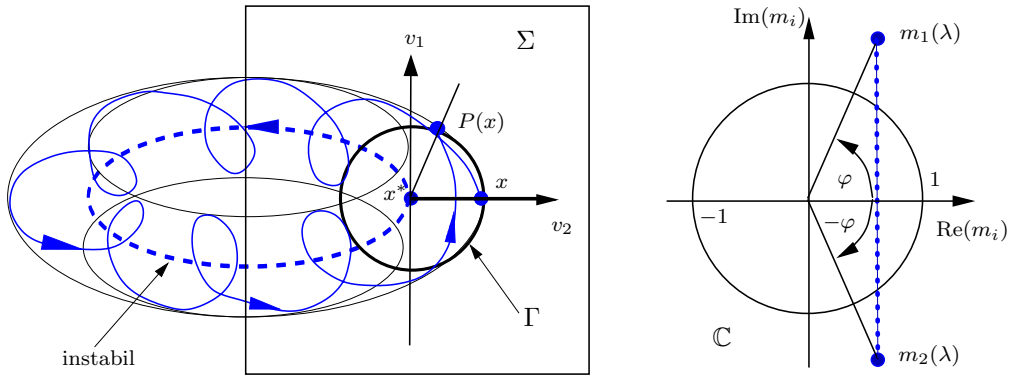


Abb. 28 Torus-Bifurkation für $\lambda > \lambda^*$: Invarianter Torus und Invarianzkurve $\Gamma \subset \Sigma$ (links) sowie Multiplikatoren $m_{1,2}(\lambda)$ (rechts)

und liegt auf einem invarianten 2-dimensionalen Torus (daher auch die Bezeichnung „Torus-Bifurkation“). Der Poincaré-Schnitt dieser Torusfläche ist die im Satz postulierte Invarianzkurve $\Gamma \subset \Sigma$. Die Rotationsgeschwindigkeit der Lösung wird für kleines r durch den Winkel $\varphi = |\arg m(0)|$ aus (94) bestimmt (vgl. Abb. 28 rechts).

Beispiel 50

Es sei $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und die Poincaré-Abbildung $P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$P(x, \lambda) = \begin{pmatrix} sx_1 - \omega x_2 - cx_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \omega x_1 + sx_2 - cx_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad s, \omega, c \in \mathbb{R}, \quad c > 0. \quad (95)$$

Setzen wir $s = \omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\lambda)$, so ist die Gleichgewichtslage $x^* = (0, 0)$ für $\lambda < 0$ asymptotisch stabil und wird für $\lambda > 0$ instabil. Verifizieren wir deshalb die Voraussetzungen des Satzes 49 mit $\lambda^* = 0$. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix

$$D_x P(0, \lambda) = \begin{pmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{pmatrix} \quad \text{sind} \quad \begin{cases} m_1(\lambda) = s + i\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\lambda)(1+i) \\ m_2(\lambda) = s - i\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\lambda)(1-i). \end{cases}$$

Mit $|m_{1,2}(\lambda)| = 1 + \lambda$ ist Voraussetzung **i.** erfüllt. Offenbar ist die reduzierte Abbildung $g \equiv P$, womit auch **ii.** gilt. $D_x g(0, \lambda)$ hat damit die Eigenwerte $m(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\lambda)(1+i)$ und $\overline{m(\lambda)}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, welche die *Transversalitätsbedingung* **iii.** mit

$$d = \frac{d}{d\lambda} |m(\lambda)|_{\lambda=0} = 1$$

erfüllen. Wegen $\varphi = |\arg m(0)| = \pi/4$ gilt schließlich auch Voraussetzung **iv**. Gehen wir nun zu Polarkoordinaten (r, θ) mit

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad \text{bzw. mit} \quad z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$$

über, so transformiert sich die Poincaré-Abbildung (95) in der Umgebung von $(0, 0)$ in

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1 + \lambda)r - \frac{1}{2}\sqrt{2}cr^3 + \mathcal{O}(r^5) \\ \theta + \frac{\pi}{4} + \frac{c}{\sqrt{2}(1 + \lambda)}r^2 + \mathcal{O}(r^4) \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Dabei wurden die entstehenden Funktionen in Taylor-Reihen nach r entwickelt und die Restterme zusammengefasst. Der Vergleich mit der Darstellung in Formel (94) liefert den Parameterwert $\sigma = -\frac{1}{2}\sqrt{2}c < 0$, weshalb der Satz von Neimark-Sacker eine *superkritische Torus-Bifurkation* für $\lambda^* = 0$ garantiert. ■

Wenn bei der Beschreibung der drei Bifurkationsszenarien vom „Übergang asymptotisch stabiler in instabile Lösungen“ die Rede ist, so trifft dies nach dem Reduktionssatz 43 offenbar nur zu, wenn die Dimension n_u des instabilen Unterraumes E_u gleich Null ist. Dies ist der praktisch interessanteste Fall, da nur asymptotisch stabile Lösungen physikalisch sind, also in der Praxis auftreten. Selbstverständlich können auch instabile Lösungen bifurkieren und in instabile Lösungen übergehen, die beim Studium dynamischer Systeme bedeutsam sind.

Beispiel 51

Das autonome System von W. F. Langford

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_3 - 0.7)x_1 - \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + (x_3 - 0.7)x_2 \\ \dot{x}_3 &= 0.6 + x_3 - x_3^3/3 - (x_1^2 + x_2^2)(1 + \varrho x_3) + \varepsilon x_3 x_1^3 \end{aligned} \quad (97)$$

liefert mit den Konstanten $\omega = 3.5$, $\varepsilon = 0$, $\beta = 0.7$ und dem Kontrollparameter ϱ die in Abbildung 29 dargestellten Lösungen. Zwischen $\varrho = 0.70$ und $\varrho = 0.60$ tritt offenbar eine Torus-Bifurkation ein. Den genauen Bifurkationswert $\varrho^* = 0.61544465\dots$ ermitteln wir mit den nachfolgend behandelten Verfahren. ■

5.3 Detektierung lokaler Bifurkationen

Wir betrachten desweiteren parameterabhängige autonome Systeme mit $n + 1$ DGL

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad f : D \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{mit} \quad D \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad \Lambda = [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad (98)$$

die wir mit Algorithmus 38 numerisch fortsetzen. Mit der Wahl \mathbb{R}^{n+1} lassen sich die folgenden Betrachtungen stets in \mathbb{R}^n durchführen. Periodisch erregte Systeme (88) können in \mathbb{R}^n analog dazu untersucht werden. Während der Lösungsfortsetzung soll das

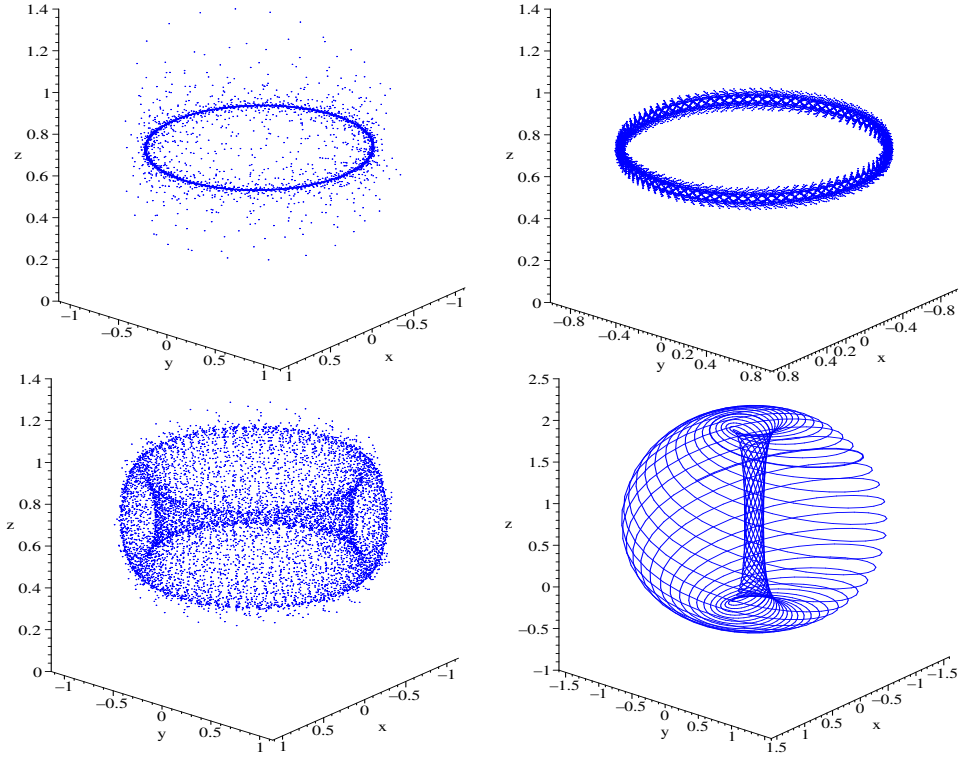


Abb. 29 Langford-System des Beispiels 26: Parameterwerte sind $\varrho = 0.70$ (links oben), $\varrho = 0.62$ (rechts oben), $\varrho = 0.60$ (links unten) und $\varrho = 0.25$ (rechts unten)

Auftreten der lokalen Bifurkationen des vorigen Abschnitts detektiert werden, um die kritischen Parameterwerte einzugrenzen und numerisch zu bestimmen. Eine direkte algorithmische Umsetzung des Reduktionssatzes 43 erscheint höchst unrealistisch, da in jedem Fortsetzungsschritt die auf die lokale Zentrumsmannigfaltigkeit $W_{loc}^c(0)$ reduzierte Poincaré-Abbildung approximiert werden müsste. Gerade bei höherdimensionalen Systemen ist der Aufwand deshalb nicht vertretbar und sollte durch einfachere notwendige Bedingungen ersetzt werden.

Neben der periodischen Lösung $x(t, \lambda)$ mit Anfangswert $s(\lambda) = x(0, \lambda)$ und Periode $T(\lambda)$ approximiert Algorithmus 38 auch deren Floquet-Multiplikatoren $m_1(\lambda), m_2(\lambda), \dots, m_n(\lambda), m_{n+1}(\lambda)$. Im vorliegenden autonomen Fall ist der Hauptmultiplikator $m_{n+1}(\lambda) = 1$ zu eliminieren. Anschließend prüfen wir, ob ein Multiplikator $m_i(\lambda)$ mit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existiert, der eine der folgenden notwendigen Bedingungen erfüllt:

- $m_i(\lambda) = +1$ für eine Fold-, Pitchfork- oder transkritische Bifurkation
- $m_i(\lambda) = -1$ für eine Flip-Bifurkation
- $|m_i(\lambda)| = 1, \quad m_i(\lambda) \notin \mathbb{R}$ für eine Torus-Bifurkation.

Wir führen dazu eine skalare Testfunktion ψ ein (vgl. dazu die Definition bei Vogt (2010)). Mit $C = (s(\lambda), T(\lambda), \lambda)$ bezeichnen wir den verfolgten Zweig periodischer Lösungen mit

Parameter $\lambda \in \Lambda$. \mathcal{U} sei eine Umgebung von C . Eine stetige Funktion $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, die genau in $\lambda = \lambda^*$ (strikt) ihr Vorzeichen ändert, werden wir wiederum *Testfunktion für den Bifurkationspunkt* $(s^*, T^*, \lambda^*) = (s(\lambda^*), T(\lambda^*), \lambda^*)$ nennen. Dies trifft zu, wenn die Funktion stetig differenzierbar ist und die Eigenschaften

$$\psi(s(\lambda^*), T(\lambda^*), \lambda^*) = 0, \quad \left. \frac{d}{d\lambda} \psi(s(\lambda), T(\lambda), \lambda) \right|_{\lambda=\lambda^*} \neq 0 \quad (99)$$

am Bifurkationspunkt (s^*, T^*, λ^*) besitzt, d. h. λ^* ist eine reguläre Nullstelle.

Betrachten wir die Testfunktion auf dem Lösungszweig C und kürzen sie vereinfachend mit $\tau(\lambda) = \psi(s(\lambda), T(\lambda), \lambda)$ ab, so können zu gegebener Monodromiematrix $M(\lambda)$ leicht folgende Testfunktionen programmiert werden:

$\tau_{\text{Fold}}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (m_i(\lambda) - 1)$	für Fold-, Pitchfork- oder transkritische Bifurkationen
$\tau_{\text{Flip}}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (m_i(\lambda) + 1)$	für Flip-Bifurkationen
$\tau_{\text{Torus}}(\lambda) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n (m_i(\lambda)m_j(\lambda) - 1)$	für Torus-Bifurkationen

Der Vorzeichenwechsel einer dieser Funktionen ist offenbar notwendig für das Auftreten der entsprechenden Bifurkation. Darstellungen dieser Testfunktionen, die die Eigenwerte der Monodromiematrix M nicht benötigen, lassen sich mit dem *bialternierenden Produkt* $A \odot B$ zweier Matrizen definieren, das bereits in Vogt (2010) definiert wurde. Das bialternierende Produkt $C = A \odot B$ zweier Matrizen $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $B = (b_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine $m \times m$ -Matrix mit $m = n(n-1)/2$, deren Zeilen von C mit dem Multiindex (p, q) , $p = 2(1)n$, $q = 1(1)p - 1$, und deren Spalten mit dem Multiindex (r, s) , $r = 2(1)n$, $s = 1(1)r - 1$ bezeichnet werden. Die Matrixelemente berechnen wir gemäß

$$C_{(p,q),(r,s)} := \frac{1}{2} \left\{ \begin{vmatrix} a_{pr} & a_{ps} \\ b_{qr} & b_{qs} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{pr} & b_{ps} \\ a_{qr} & a_{qs} \end{vmatrix} \right\}. \quad (100)$$

Wenn die Monodromiematrix $M = (m_{ik}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Eigenwerte m_1, m_2, \dots, m_n hat, so folgt unter anderem, dass die Matrix $C = M \odot M$ die Eigenwerte $m_i m_j$, $i = 1(1)n$, $j = i + 1(1)n$ besitzt. Wegen (100) lassen sich die Elemente von $M \odot M$ leicht zu

$$C_{(p,q),(r,s)} := m_{pr} m_{qs} - m_{qr} m_{ps}$$

berechnen und gemäß Definition anordnen. Liegt ein konjugiert komplexes Paar von Eigenwerten auf dem Einheitskreis, so verschwindet die Determinante von $M \odot M - I$. Damit lassen sich folgende Testfunktionen angeben, die lediglich Determinantenberechnungen erfordern:

$\tau_{\text{Fold}}(\lambda)$	$= \det(M - I)$	für Fold-, Pitchfork- oder transkritische Bifurkation
$\tau_{\text{Flip}}(\lambda)$	$= \det(M + I)$	für Flip-Bifurkation
$\tau_{\text{Torus}}(\lambda)$	$= \det(M \odot M - I)$	für Torus-Bifurkation

Die Rechenzeiten zur Berechnung des bialternierenden Produktes nehmen allerdings mit größerer Dimension n extrem zu, so dass dieser Zugang nur für kleine Systeme empfohlen werden kann. Man überprüfe dies mit selbst gewählten Matrizen M verschiedener Größe. Es sei betont, dass das Verschwinden der Testfunktion lediglich notwendig für eine entsprechende Bifurkation ist. Außer den drei generischen Kodimension-1-Bifurkationen Fold, Flip und Torus sind sogenannte Bifurkationen höherer Ordnung möglich, insbesondere die Pitchfork- und transkritische Bifurkation. Für diese beiden Typen ist $\tau_{\text{Fold}}(\lambda) = \det(M - I) = 0$ notwendig. Kann man die auf die lokale Zentrumsmanigfaltigkeit $W_{loc}^c(0)$ reduzierte Poincaré-Abbildung $g(u, \lambda)$ in der Darstellung

$$u = g(u, \lambda) \quad \text{mit} \quad g(u, \lambda) = A_c u + h(u, \lambda) \quad (101)$$

gewinnen, so sind gemäß Abschnitt 5.2 notwendige Bedingungen für eine

■ transkritische Bifurkation:

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

■ Heugabel-Bifurkation:

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = 0.$$

Wir wollen der Einfachheit wegen die drei generischen Bifurkationstypen Fold, Flip und Torus voraussetzen. Wie approximieren wir dann die auftretenden Bifurkationswerte λ^* ? Nehmen wir an, dass während der Fortsetzung der periodischen Lösung zwei Parameterwerte $\lambda_0 < \lambda_1$ ermittelt werden, für die ein Vorzeichenwechsel der Testfunktion eintritt, d. h.

$$\tau(\lambda_0) \tau(\lambda_1) = \psi(s(\lambda_0), T(\lambda_0), \lambda_0) \psi(s(\lambda_1), T(\lambda_1), \lambda_1) < 0. \quad (102)$$

Mit der Stetigkeit von ψ folgt dann, dass ein Wert $\lambda^* \in (\lambda_0, \lambda_1)$ existieren muss, für den $\tau(\lambda^*) = \psi(s(\lambda^*), T(\lambda^*), \lambda^*) = 0$ Null wird. Diese Nullstelle λ^* lässt sich mittels Bisektionsverfahren oder mittels Regula falsi mit Intervallschachtelung sicher eingrenzen. Beide Verfahren haben sich als zuverlässig erwiesen, da eine einmal detektierte und erfasste Nullstelle damit nicht mehr verloren geht. In Abbildung 30 wird das Verhalten von Algorithmus 52 bei einer Torus-Bifurkation veranschaulicht.

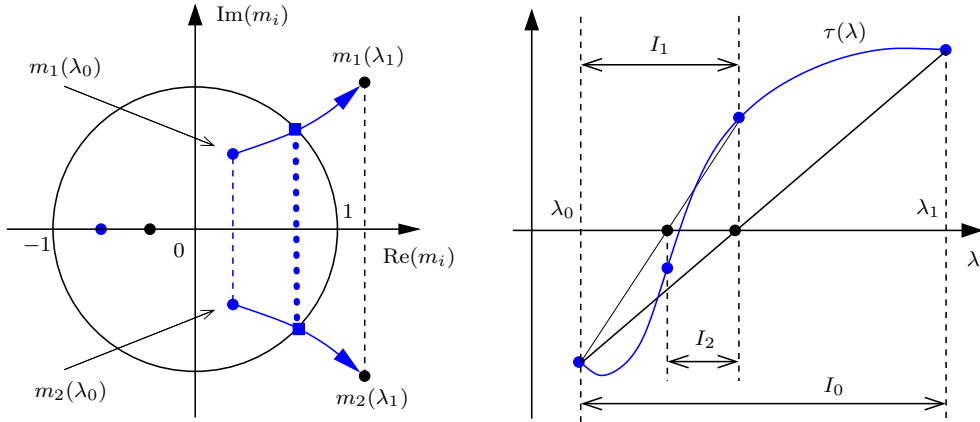


Abb. 30 Eingrenzung eines Bifurkationswertes λ^* : Charakteristische Multiplikatoren bei Torus-Bifurkation (links) und Regula falsi mit Intervallschachtelung (rechts)

ALGORITHMUS 52 (Einschachtelung von Bifurkationswerten)

Function $[\lambda^*, \Lambda] = \text{bifurkation}(\lambda_0, \lambda_1, \text{tol}, kmax)$

1. (Eignungstest) Berechne $\tau_0 = \tau(\lambda_0)$, $\tau_1 = \tau(\lambda_1)$. Falls $\tau_0 \tau_1 > 0$, so STOP.
2. Für $k = 0, 1, \dots, kmax$ iteriere:
 - 2.1. (Regula falsi) $\lambda^* := \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \frac{\tau_0}{\tau_0 - \tau_1}$
 - 2.2. (Testfunktion) Bestimme $\tau^* := \tau(\lambda^*)$.
Falls $|\tau^*| < \text{tol}$, so gehe zu Schritt 3.
 - 2.3. (Intervallschachtelung) Falls $\tau^* \cdot \tau_1 < 0$, so
 $\lambda_0 := \lambda^*$, $\tau_0 := \tau^*$, sonst $\lambda_1 := \lambda^*$, $\tau_1 := \tau^*$
 - 2.4. Falls $|\lambda_1 - \lambda_0| < \text{tol}$, so $\lambda^* := (\lambda_0 + \lambda_1)/2$ und gehe zu Schritt 3.
3. Falls $\lambda_0 < \lambda_1$, so setze $\Lambda := [\lambda_0, \lambda_1]$, sonst $\Lambda := [\lambda_1, \lambda_0]$.
4. Return λ^*, Λ

Bemerkungen 53

1. Wegen der Regularitätsvoraussetzung (99) liefern Newton-Verfahren die Nullstellenapproximationen zwar schneller; sie bergen wegen der genäherten Berechnung der Testfunktion und deren Ableitung allerdings oft die Gefahr einer Divergenz.
2. Im Falle der Fold-Bifurkation stehen keine geeigneten Parameterwerte $\lambda_0 \neq \lambda_1$ des natürlichen Parameters zur Verfügung, die der Bedingung (102) genügen. Hier wird eine Neuparametrisierung – z. B. mittels Pseudo-Bogenlänge – erforderlich. Die Ausführungen zu den Testfunktionen lassen sich jedoch leicht auf allgemeine Parameterisierungen der Lösungskurve übertragen und wie Algorithmus 52 darstellen. ■

5.4 Anwendung bei nichtlinearen energetischen Systemen

Als Anwendung wollen wir ein allgemeines energetisches Dreiphasen-System der Elektrotechnik betrachten, das von Vogt und Büntig (1998), Büntig und Vogt (1998) modelliert und in Vogt und Büntig (2003) ausführlich analysiert wird. Die Gleichungen beschreiben ein grundlegendes mathematisches Modell für Stromversorgungssysteme. Es trägt dem nichtlinearen Verhalten solcher Systeme Rechnung und soll Auslastungsaussagen ermöglichen.

Die Schaltung des Systems ist in Abbildung 31 dargestellt. Darin werden drei nichtlineare Ferroresonanzkreise zum Dreiphasen-System gekoppelt. Die einzelnen Phasen werden mit R , S bzw. T bezeichnet. Die Rückführung erfolgt über den rechts gezeichneten Nullleiter. Dabei steht R_0 für den Leitungswiderstand und L_0 für die Induktivität des Nullleiters.

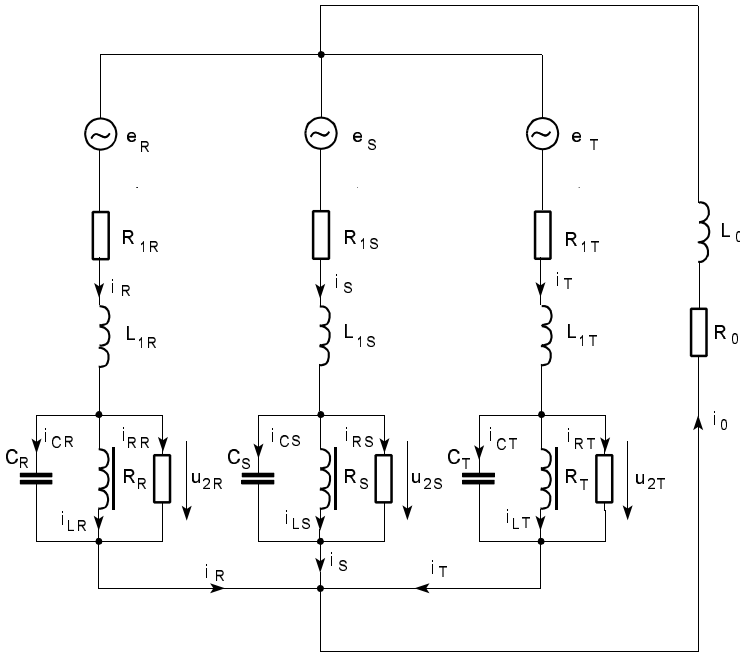


Abb. 31 Stern-Stern Schaltung des Dreiphasen-Systems aus Vogt und Büntig (1998)

Der Generator ist symmetrisch, d. h. mit der Frequenz ω gilt

$$e_R(t) = \hat{E}_0 \sin(\omega t), \quad e_S(t) = \hat{E}_0 \sin(\omega t - 2\pi/3), \quad e_T(t) = \hat{E}_0 \sin(\omega t - 4\pi/3).$$

Ein wesentlicher Bestandteil der nichtlinearen Belastung ist die Induktivität mit dem nichtlinearen Kennlinien-Ansatz

$$i_L = i_L(\psi) = a^* \psi + b^* \psi^n \quad \text{mit} \quad a^*, b^* > 0, \quad n = 3 \quad \text{oder} \quad n = 9. \quad (103)$$

Darin bezeichnet ψ den Magnetfluss und die Konstanten a^*, b^*, n sind charakteristisch für das Kernmaterial des Transformators.

Das System wird im allgemeinen Fall eines realen Nulleiters mit $R_0 \neq 0$ und $L_0 \neq 0$ ohne gemeinsamen Eisenkreis durch neun Differenzialgleichungen 1. Ordnung für die Flüsse, Ströme und Spannungen in den drei Phasen beschrieben. Zur Normierung dieser Gleichungen werden dafür die neun dimensionslosen Variablen

- x_R, x_S, x_T – für die normierten Flüsse in den Phasen R, S, T ,
- y_R, y_S, y_T – für die normierten Ströme in den Phasen R, S, T ,
- z_R, z_S, z_T – für die normierten Spannungen in den Phasen R, S, T

eingeführt. Die normierte Zeit $\tau := \omega t$ wollen wir auch weiterhin mit t bezeichnen. Die Nichtlinearität (103) des Systems wird durch die Terme $a_\mu x_\mu + b_\mu x_\mu^n$, $\mu \in \{R, S, T\}$ beschrieben. Wir gehen von vollständiger Symmetrie aus und nehmen für alle drei Phasen identische Kenngrößen an. Auch die Amplitude der Erregerspannung wird für alle drei Phasen gleich gesetzt und ist nachfolgend der Hauptverfolgungsparameter λ . Das System (104) gliedert sich in drei gekoppelte Gleichungsblöcke – einen für jede Phase:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_R &= z_R \\
 \dot{y}_R &= \frac{q_0}{q_1} (p_2 p_0 \sin t - l_S p_0 \sin(t - \frac{2}{3}\pi) - l_T p_0 \sin(t - \frac{4}{3}\pi)) \\
 &\quad - (r_1 p_2 p_0) y_R + (s_1 l_R p_0) y_S + (t_1 l_R p_0) y_T \\
 &\quad - \rho l_R p_0 (y_R + y_T + y_S) + \frac{1}{r_0} (-p_2 p_0 z_R + l_S p_0 z_S + l_T p_0 z_T) \\
 \dot{z}_R &= q_1 (y_R - x_R (a + b x_R^8)) - q_2 z_R \\
 \dot{x}_S &= z_S \\
 \dot{y}_S &= \frac{q_0}{q_3} (-l_R p_0 \sin t + p_3 p_0 \sin(t - \frac{2}{3}\pi) - l_T p_0 \sin(t - \frac{4}{3}\pi)) \\
 &\quad + (r_1 l_S p_0) y_R - (s_1 p_3 p_0) y_S + (t_1 l_S p_0) y_T \\
 &\quad - \rho l_S p_0 (y_R + y_T + y_S) + \frac{1}{s_0} (l_R p_0 z_R - p_3 p_0 z_S + l_T p_0 z_T) \\
 \dot{z}_S &= q_3 (y_S - x_S (a + b x_R^8)) - q_4 z_S \\
 \dot{x}_T &= z_T \\
 \dot{y}_T &= \frac{q_0}{q_5} (-l_R p_0 \sin t - l_S p_0 \sin(t - \frac{2}{3}\pi) + p_4 p_0 \sin(t - \frac{4}{3}\pi)) \\
 &\quad + (r_1 l_T p_0) y_R + (s_1 l_T p_0) y_S - (t_1 p_4 p_0) y_T \\
 &\quad - \rho l_T p_0 (y_R + y_T + y_S) + \frac{1}{t_0} (l_R p_0 z_R + l_S p_0 z_S - p_4 p_0 z_T) \\
 \dot{z}_T &= q_5 (y_T - x_T (a + b x_R^8)) - q_6 z_T
 \end{aligned} \tag{104}$$

Die erste Gleichung jeder Phase R, S, T basiert auf dem Induktionsgesetz und verknüpft den normierten Fluss mit der normierten Spannung. Die zweite Gleichung beschreibt die Kopplung zwischen den einzelnen Phasen des Systems. Hier sind auch die Amplituden der Erregerfunktion enthalten. Die dritte Gleichung jeder Phase enthält das Modell der Nichtlinearität und die Belastungsparameter des Systems. Typische Parameterwerte sind

- $a = 0.25, \quad b = 0.75, \quad \rho = 0.10 \quad \text{und} \quad l_R = l_S = l_T = 1.0$
- $q_1 = 1.0, \quad q_2 = 0.50, \quad q_3 = 1.0, \quad q_4 = 0.50, \quad q_5 = 1.0, \quad q_6 = 0.50$
- $r_0 = s_0 = t_0 = 0.05 \quad \text{und} \quad r_1 = s_1 = t_1 = 0.10,$

womit sich die Sekundärparameter

- $p_0 = 1/p_1 \quad \text{mit} \quad p_1 = 1 + l_S + l_R + l_T \quad \text{sowie}$
- $p_2 = 1 + l_S + l_T, \quad p_3 = 1 + l_R + l_T, \quad p_4 = 1 + l_S + l_R$

ergeben. Der Parameter $\lambda = q_0 > 0$ ist frei. Von Bedeutung sind Parameterbereiche für λ , in denen sich stabile 2π -periodische Schwingungen dieses komplizierten Systems einstellen. Folgende Arbeitsschritte zur Systemanalyse werden empfohlen:

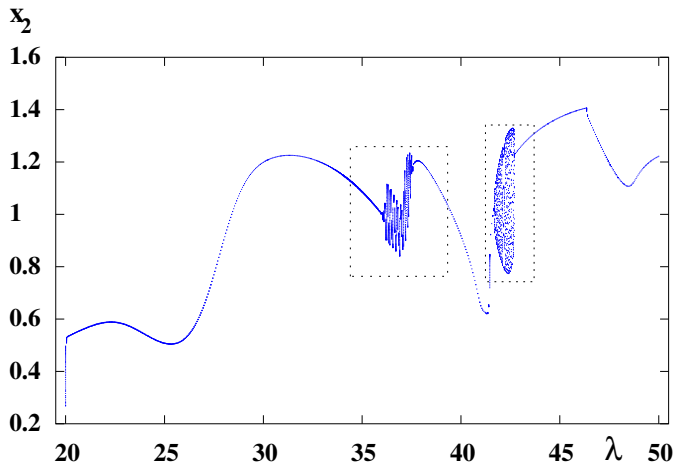


Abb. 32

Darstellung der Stroboskop-Abbildung:
In den Parameterintervallen $34 \leq \lambda \leq 38$ und $41 \leq \lambda \leq 43$ erkennt man das Auftreten nicht-periodischer Attraktoren

Einfaches Bifurkationsdiagramm

Mittels Lösungssimulation verschaffen wir uns einen ersten Eindruck vom Auftreten stabiler periodischer Lösungen. Beginnend bei $\lambda = 20$ lassen wir das System über k_0 Perioden einswingen und stellen dann m Stroboskop-Punkte $x_S(2\pi k)$, $k = k_0(1)k_0 + m - 1$, einer Lösungskomponente grafisch über dem Kontrollparameter λ dar. Diese einfache Fixpunkt-Iteration der Stroboskop-Abbildung – im Ingenieurwesen oft auch “Brute-force“-Methode genannt – veranschaulicht allerdings nur Attraktoren; andere Lösungen können hingegen nicht detektiert werden. Fortsetzung über das Parameterintervall $20 \leq \lambda \leq 50$ ergibt das Diagramm in Abbildung 32.

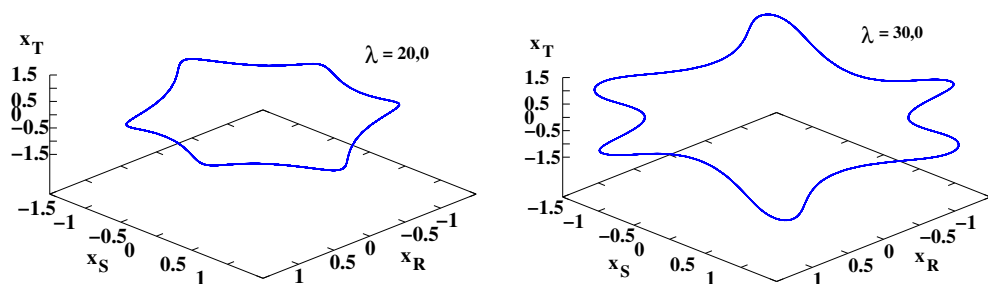


Abb. 33 Periodische Lösungen in (x_R, x_S, x_T) für $\lambda = 20.0$ und $\lambda = 30.0$

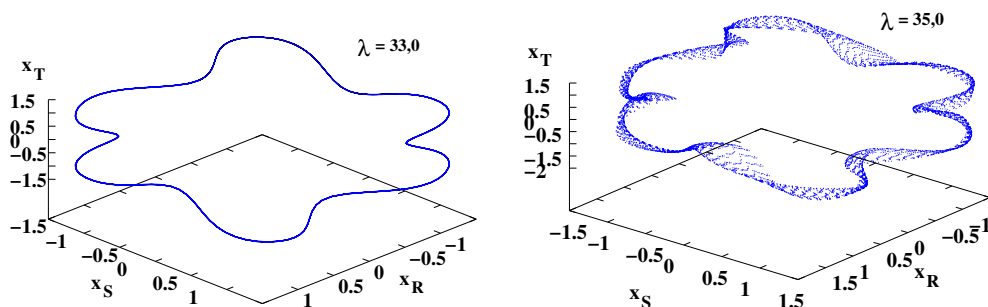


Abb. 34 Lösungen in (x_R, x_S, x_T) für $\lambda = 33.0$ und $\lambda = 35.0$

Explizite Lösungsdarstellung in 2D oder 3D

In höherdimensionalen Systemen vermitteln Lösungsgrafiken bei festem Parameterwert λ in der Regel nur geringen Erkenntnisgewinn. Nach Auswahl der drei Koordinaten x_R, x_S, x_T liefert die Projektion der Orbits in den 3D-Unterraum der Magnetflüsse die Abbildungen 33 und 34. Für $\lambda = 35.0$ vermuten wir hier eine quasi-periodische oder chaotische Lösung.

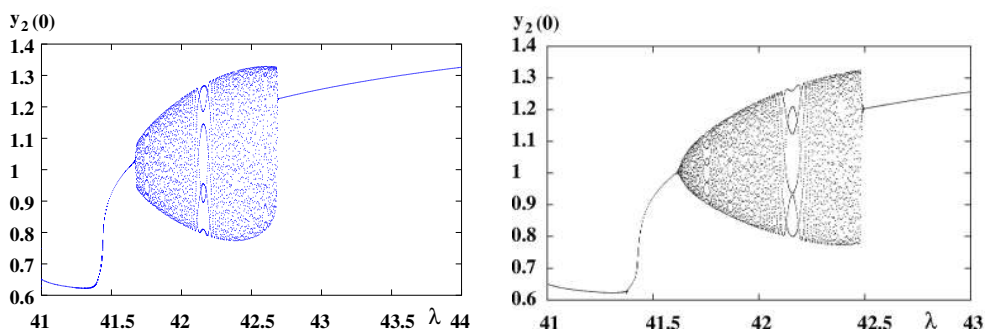


Abb. 35 Bifurkationsdiagramm mit λ aufwärts (links) und abwärts (rechts)

Eingrenzung nicht-periodischer Attraktoren

Durch Aufweitung (Zoomen) der Parameterintervalle können nun die Übergänge zu nicht-periodischen Lösungen genauer eingegrenzt werden. Dazu generieren wir die Bifurkations-

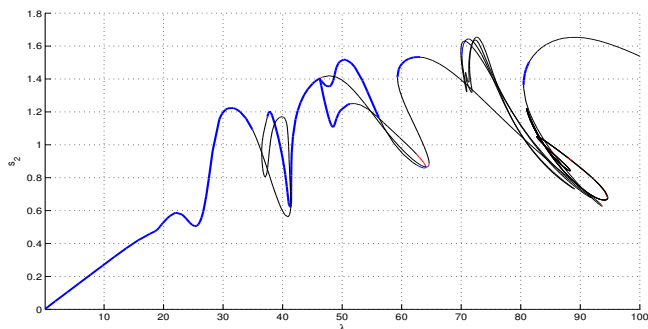


Abb. 36 (λ, y_R) -Diagramm (blau – stabil, schwarz – instabil). Neben dem Primärzweig S_1 wurden auch die ermittelten abzweigenden Lösungen eingetragen

diagramme sowohl monoton wachsend in Abbildung 35 links als auch fallend in Abbildung 35 rechts. Mit etwas Übung lässt der “Torus-Bubble“ bei $\lambda \approx 41.5$ eine superkritische und bei $\lambda \approx 42.5$ eine subkritische Torus-Bifurkation vermuten. Instabile periodische Lösungen sowie abzweigende Lösungen können wir mit derartigen Diagrammen nicht erhalten, womit eine genaue Bifurkationsdetektierung nicht möglich ist.

2D-Bifurkationsdiagramm mittels Lösungsfortsetzung

Nutzen wir Algorithmus 16 zusammen mit einer Lösungsfortsetzung, wie in Algorithmus 38 dargestellt, so können wir stabile und instabile Lösungen ermitteln. Deren Unterscheidung wird mit der zusätzlichen Stabilitätsanalyse (vgl. Schritt 7 auf S. 45) leicht möglich. Für $\lambda = 0$ hat System (104) die Nulllösung, mit der wir die Fortsetzung über das Gesamtintervall $0 \leq \lambda \leq 100$ starten können. Im 2D-Bifurkationsdiagramm für $(\lambda, y_R(0))$

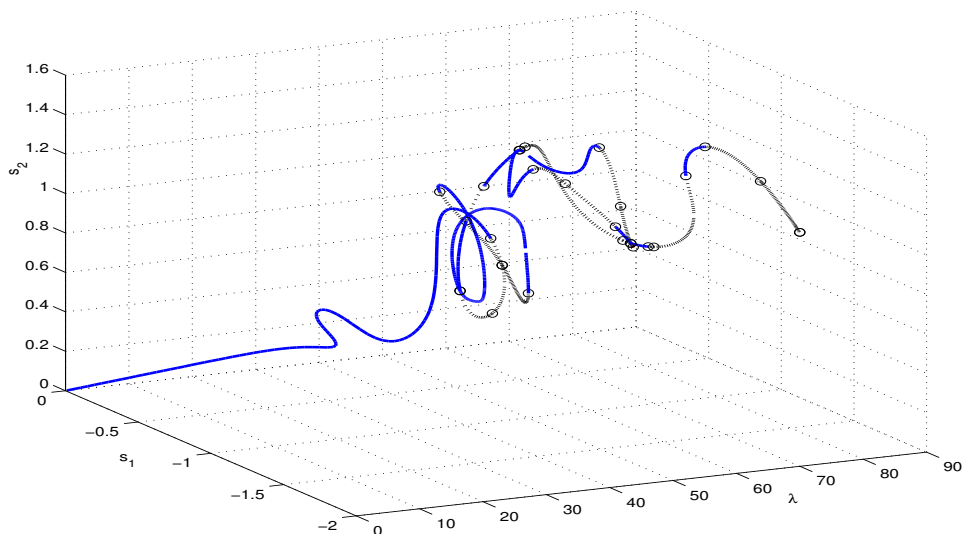


Abb. 37 (λ, x_R, y_R) -Diagramm (blau – stabil, schwarz – instabil)

(vgl. Abb. 36) wurden neben dem Primärzweig S_1 auch die ermittelten abzweigenden Lösungen eingetragen.

Bifurkationsdetektierung

Wesentlich informativer sind 3D-Bifurkationsdiagramme, die zwei ausgewählte Lösungskomponenten über dem Kontrollparameter darstellen; in Abbildung 37 sind dies $(\lambda, x_R(0), y_R(0))$, $0 \leq \lambda \leq 80$. Offenbar existiert für $0 \leq \lambda \leq 34$ eine stabile 2π -periodische Lösung. Mit der vorgestellten indirekten Methode liefert Algorithmus 52 die Bifurkationspunkte in der ersten Spalte von Tabelle 3 sowie die detektierten Bifurkationstypen. An den berechneten charakteristischen Multiplikatoren mit $|m_i| \approx 1$ lässt

Tab. 3 Detektierte Bifurkationen des energetischen Dreiphasen-Systems

Parameter λ (mit CPO)	Multiplikatoren m_i	Betrag $ m_i $	Typ der Bifurkation	Parameter (AUTO)
34.93632841	$0.9981943 \pm 0.0600340i$	0.9999979	Torus	<u>34.93633</u>
36.48325162	0.9999425	0.9999425	Pitchfork	<u>36.48326</u>
39.50521827	$0.9998027 \pm 0.0195815i$	0.9999944	Torus	<u>39.50487</u>
41.39543821	1.0002848	1.0002848	Pitchfork	<u>41.39548</u>
41.62966402	$0.3740468 \pm 0.9274070i$	0.9999974	Torus	<u>41.62967</u>
42.54245646	$0.6063643 \pm 0.7951860i$	0.9999992	Torus	<u>42.54246</u>
46.25346533	0.9999141	0.9999141	Pitchfork	<u>46.25356</u>
47.19143019	$0.9625519 \pm 0.2709929i$	0.9999716	Torus	<u>47.19146</u>
64.06674375	1.0000024	1.0000024	Pitchfork	<u>64.06676</u>
64.57394419	$0.9744982 \pm 0.2260976i$	1.0003834	Torus	<u>64.57393</u>
64.60599927	1.0021892	1.0021892	Fold	<u>64.60600</u>
59.28615751	0.9998577	0.9998577	Fold	<u>59.28616</u>
63.10205664	$0.9604222 \pm 0.2785375i$	9.9999691	Torus	<u>63.10206</u>
72.27656438	1.0000347	1.0000347	Pitchfork	<u>72.27654</u>
92.53787115	$0.9989053 \pm 0.0468599i$	1.0000039	Torus	<u>92.53791</u>
93.45943866	0.9998071	0.9998071	Pitchfork	<u>93.45937</u>
93.71406409	0.9993964	0.9993964	Fold	<u>93.71406</u>
93.70913803	$0.0969198 \pm 0.7473412i$	0.7535996	Torus	<u>93.69532</u>
80.47671203	0.9998948	0.9998948	Fold	<u>80.47671</u>
81.41454519	1.0000303	1.0000303	Pitchfork	<u>81.41452</u>
84.29459070	$0.8574302 \pm 0.5146328i$	1.0000167	Torus	<u>84.29463</u>

sich die geringere Genauigkeit der Fold-Bifurkationswerte und der Torus-Bifurkation bei $\lambda \approx 93.70913803$ erkennen. Für ausgewählte Grafiken wie in Abbildung 38 sind die durchweg richtigen Typangaben jedoch nützlich.

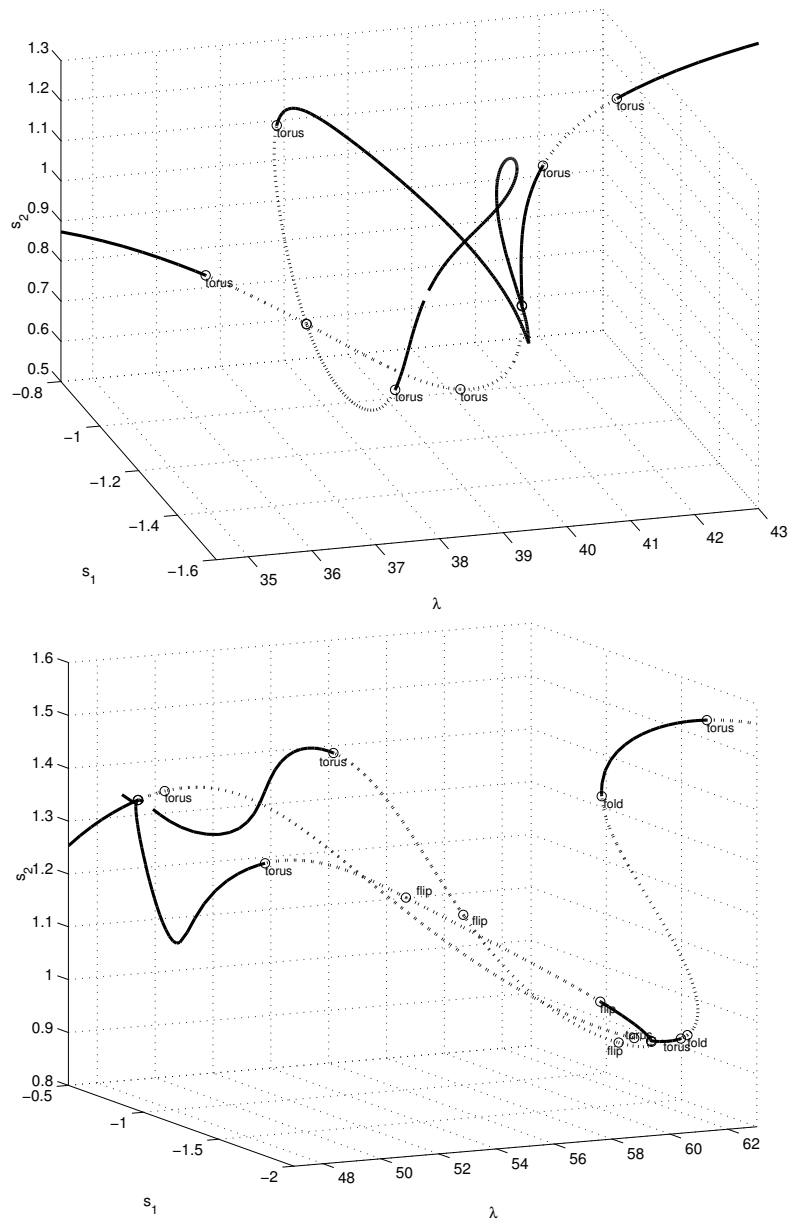


Abb. 38 Bifurkationsdiagramm für $35 \leq \lambda \leq 43$ (oben) und $47 \leq \lambda \leq 63$ (unten)

Analyse von Bifurkationsszenarien

Betrachtet man einen ausgewählten Lösungsweig, der zwischen zwei stabilen Zuständen mindestens 2 Bifurkationen durchläuft, so kann man von einem *Bifurkationsszenario* sprechen. Ausgehend von einem stabilen Zustand beginnt das Szenario, wenn ein Multiplikator(paar) den Einheitskreis verlässt und damit einen Stabilitätsverlust signalisiert. Es

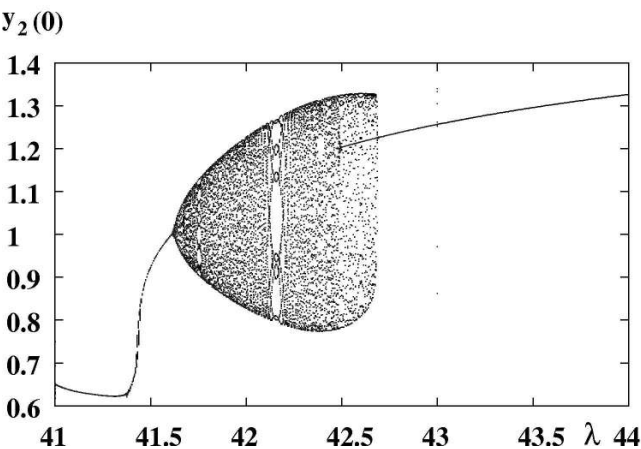


Abb. 39 „brute force“-Darstellung von Szenario 1. Der Parameter λ wird sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend variiert

endet, wenn alle Multiplikatoren in den Einheitskreis zurückgekehrt sind und die Lösung wieder stabil ist. Jedes Szenario kann durch ein dafür typisches Lösungsdiagramm und gegebenenfalls durch ein „brute-force“-Diagramm beschrieben werden. Untersuchen wir das einfache, aber häufig auftretende Szenario des primären Lösungszweiges S_1 mit zwei Bifurkationen in Diagramm 39, das auch in Abbildung 38 erkennbar wird. Die Tabelle 4 enthält zu jedem Bifurkationspunkt den berechneten Parameterwert λ , den Bifurkationstyp, die drei betragsgrößten Multiplikatoren(paare) und eine schematische Darstellung des Einheitskreises mit den für die Bifurkation wichtigen Floquet-Multiplikatoren.

Tab. 4 Bifurkationspunkte von Szenario 1 mit den betragsgrößten Multiplikatoren

Szenario 1 im primären Lösungszweig S_1		
λ / Typ	Multiplikatoren	Skizze
<u>41.62967</u> Torus- Bifurkation	$m_{1,2} = 0.37405 \pm 0.92742i$ $m_3 = 0.53344 + 0.00000i$ $m_{4,5} = 0.46258 \pm 0.17661i$	
<u>42.54246</u> Torus- Bifurkation	$m_{1,2} = 0.60636 \pm 0.79519i$ $m_3 = 0.50508 + 0.00000i$ $m_{4,5} = -0.25929 \pm 0.07309i$	

Das zweite in Abbildung 38 erkennbare Szenario liegt im Intervall $34 \leq \lambda \leq 42$. Neben dem primären Lösungszweig S_1 ist der darin dargestellte sekundäre Zweig S_2 mit seinen Stabilitätsverhältnissen dargestellt. Die zugehörigen „brute-force“-Diagramme 40 sind nicht aussagekräftig und scheinen nicht mit den Werten in Abbildung 38 zu korrespondieren. In Tabelle 5 wird das Bifurkationsverhalten beider Lösungswege S_1 und

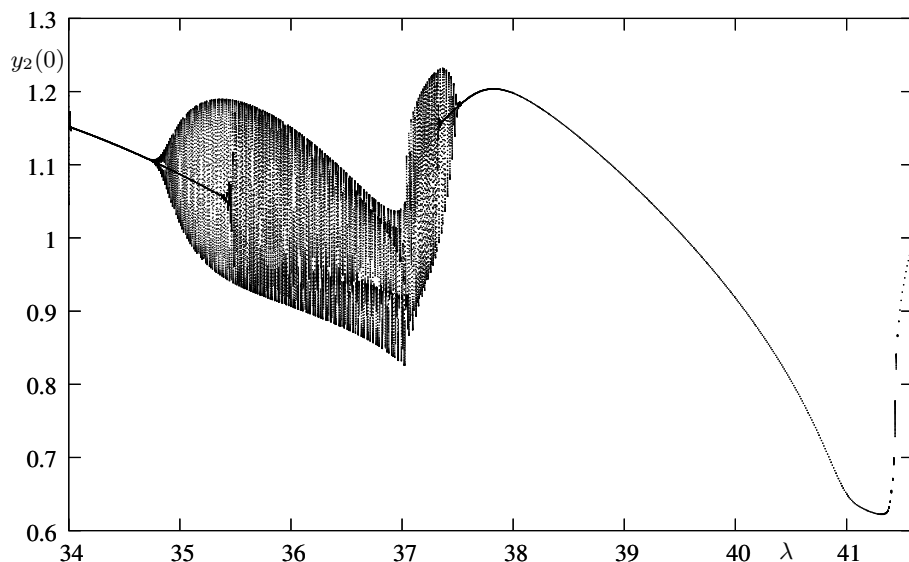


Abb. 40 „brute force“-Darstellung von Szenario 2 (aufwärts und abwärts)

S_2 verdeutlicht. Hier interagieren eine Torus- und eine Pitchfork-Bifurkation des Primärzweiges. Die stabilen Sekundärzweige S_2 für $\lambda > 37.45021$ führen offensichtlich zu den dargestellten Diagrammen. Weitere Bifurkationen bei größeren Parameterwerten $\lambda < 100$ – wie in Abbildung 38 dargestellt – wurden von Ernst (2004) mit dem an der TU Ilmenau von Peterseim (2004) entwickelten MATLAB-Paket CPO (Continuation of Periodic Orbits) analysiert und mittels der Ergebnisse des bekannten Paketes AUTO2000 (vgl. Doedel et al. (2002)) verifiziert. Tabelle 3 zeigt in der letzten Spalte die mit AUTO berechneten Parameterwerte samt den übereinstimmenden signifikanten Dezimalstellen (unterstrichen) sowie die von beiden Codes stets richtig erkannten Bifurkationstypen. Beide Programmpakete haben eine Torus-Bifurkation bei $\lambda \approx 80.47679$ nicht detektiert, da sie sehr nahe an einer Fold-Bifurkation eintritt. Die gesamte Fortsetzung des primären Lösungszweiges S_1 über das Intervall $[0.1, 100]$ inklusive der Ermittlung aller Verzweigungspunkte aus Tabelle 3 nahm auf einem PC (1.5 GHz) mit CPO lediglich 2:30 Minuten in Anspruch.

Generell lässt sich die Vielzahl von Methoden zur Approximation von Bifurkationspunkten in zwei grundlegende Klassen einteilen:

- *Indirekte Methoden* bestimmen zu einer Folge (λ_k) , $k = 0, 1, 2, \dots$ von Parameterwerten die zugehörigen periodischen Lösungen und berechnen damit die Werte $\tau(\lambda_k)$ einer oder mehrerer ausgewählter Testfunktionen. Mittels iterativer Nullstellenbestimmung bzw. durch Interpolation kann so ein lokaler Bifurkationspunkt $(s(\lambda^*), T(\lambda^*), \lambda^*)$ detektiert werden. In vielen Fällen ist die erreichte Genauigkeit indirekter Methoden zur Bestimmung von Bifurkationspunkten *in praxi* ausreichend, wie die CPO-Werte

Tab. 5 Bifurkationspunkte von Szenario 2 in den Lösungszweigen S_1 und S_2

Szenario 2 in den Lösungszweigen S_1 und S_2		
λ / Typ	Multiplikatoren	Skizze
<u>34.93633</u> Torus-Bif. in Zweig S_1	$0.99819 \pm 0.06005i$ $0.49487 + 0.00000i$ $-0.19431 \pm 0.79623i$	
<u>36.48326</u> Pitchfork-Bif. in Zweig S_1	$0.99996 + 0.00000i$ $1.01495 \pm 0.03890i$ $-0.13993 \pm 0.62362i$	
<u>37.45021</u> Torus-Bif. in Zweig S_2	$0.99805 \pm 0.06247i$ $0.52999 + 0.00000i$ $-0.11696 \pm 0.13727i$	
<u>39.50487</u> Torus-Bif. in Zweig S_1	$0.99981 \pm 0.01958i$ $4.62004 + 0.00000i$ $-0.08849 \pm 0.12820i$	
<u>41.39548</u> Pitchfork-Bif. in Zweig S_1	$0.99998 + 0.00000i$ $0.68336 \pm 0.01742i$ $-0.05848 \pm 0.14020i$	

in Tabelle 3 erkennen lassen.

- *Direkte Methoden* bestimmen einen lokalen Bifurkationspunkt $(s(\lambda^*), T(\lambda^*), \lambda^*)$ als reguläre Lösung eines erweiterten Randwertproblems. Dazu werden die bestimmenden Differenzialgleichungen, Rand- und Phasenbedingungen um weitere Gleichungen zur Berechnung von Nullraumelementen ergänzt. Die Zahl der gesuchten Funktionen
 - verdoppelt sich damit im Fall der Fold- und der Flip-Bifurkation
 - verdreifacht sich bei Torus-Bifurkation.

Eine gute Übersicht über verschiedene *minimal erweiterte Randwertprobleme* findet man in einer Arbeit von Doedel et al. (2003). Diese erweiterten DGL-Systeme sind für den jeweiligen – vorab zu detektierenden – Bifurkationstyp spezifisch und setzen zudem gute Startnäherungen voraus. Im Code AUTO2000 (vgl. Doedel et al. (2002)) werden sie erfolgreich eingesetzt.

6 Zusammenfassung

Um periodische Schwingungen (Lösungen, Orbits) nichtlinearer dynamischer Systeme, beschrieben durch gewöhnliche Differenzialgleichungen, berechnen und analysieren zu können, wurden folgende Zugänge und Verfahren vorgestellt:

- Das Schießverfahren (shooting method) reduziert das Randwertproblem auf eine Folge von Anfangswertproblemen, wofür erprobte Standardlöser (Einschritt- und lineare Mehrschrittverfahren) verfügbar sind. Systeme mit „stark instabilen“ Lösungen können oft mit den vorgestellten Mehrfach-Schießverfahren (multiple shooting) erfolgreich behandelt werden.
- Beide Verfahren liefern eine hinreichend gute Approximation der Monodromiematrix, mit deren Eigenwerten, den Floquet-Multiplikatoren, eine Stabilitäts- und Bifurkationsanalyse möglich wird. Gekoppelt mit einer numerischen Fortsetzungstechnik aus Vogt (2010) kann die Abhängigkeit des Lösungs- und Stabilitätsverhaltens von Parametern untersucht werden.
- Im Falle autonomer DGL-Systeme wird eine zusätzliche Phasenbedingung eingeführt, um die Lösung und die im Allgemeinen unbekannte Periodendauer lokal eindeutig bestimmen zu können.
- Die Poincaré-Abbildung und – im periodisch erregten Fall – die Stroboskop-Abbildung stellen wesentliche Hilfsmittel zur Veranschaulichung des Lösungsverhaltens und der auftretenden Bifurkationen dar. Zu ihrer effizienten Bestimmung wird ein numerischer Algorithmus entwickelt und angewendet.
- Schließlich werden auftretende Bifurkationen einschließlich der Torus-Bifurkation (Neimark-Sacker-Bifurkation) klassifiziert und indirekte (iterative) Verfahren zu deren Detektierung und Einschachtelung vorgestellt.
- Eine nichttriviale Anwendung zur Bifurkationsanalyse energetischer Systeme in der nichtlinearen Elektrotechnik mit 9 DGL kann mittels der im Beitrag entwickelten Algorithmen erfolgreich behandelt und bewertet werden.

Die enthaltenen Beispiele und nachfolgenden Aufgaben sollen der besseren Veranschaulichung der theoretischen Aussagen dienen.

7 Aufgaben

Aufgabe 1

Analysieren Sie das dynamische System aus Moore (1996) mit Parameter $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\lambda - 3)x - 4y + x(z + \tfrac{1}{5}(1 - z^2)) \\ \dot{y} &= 4x + (\lambda - 3)y + y(z + \tfrac{1}{5}(1 - z^2)) \\ \dot{z} &= \lambda z - (x^2 + y^2 + z^2).\end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie sämtliche Gleichgewichtslösungen und untersuchen Sie deren Stabilität.
- b) Für welche Parameterwerte λ^* tritt Stabilitätsverlust ein? Prüfen Sie, ob eine Hopf-Bifurkation vorliegt.
- c) Transformieren Sie das System in Zylinderkoordinaten (r, θ, z) mit $(x, y, z) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, z)$ und ermitteln Sie periodische Orbits mit $r(t) = \text{const}, z(t) = \text{const}$. Wie lautet deren Periode T ?
- d) Für $\lambda^{**} = 2$ existiert ein periodischer Orbit mit $r = 1$ und $z = 1$. (Probe!) Welche Bifurkation tritt bei $\lambda^{**} = 2$ für diesen Orbit im (r, z) -System auf?

Aufgabe 2

Betrachten Sie für den Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ folgendes DGL-System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \lambda x_1 - \omega x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 + \lambda x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

mit dem festen reellen Wert $\omega > 0$.

- a) Bestimmen Sie periodische Lösungen dieses Systems für Werte $\lambda > 0$. Wie groß ist die Periode?
- b) Stellen Sie das zugehörige Variationssystem auf, und lösen Sie es. Wie lauten die Monodromiematrix M und die zugehörige Matrix R ?
- c) Bestimmen Sie die charakteristischen Multiplikatoren und die charakteristischen Exponenten. Welche Stabilitätseigenschaft besitzen die Lösungen?

Aufgabe 3

Die Monodromiematrix M eines periodischen Orbits der Periode T hat die Darstellung

$$M = e^{T \cdot R} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (T \cdot R)^k$$

mit der Matrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus der Floquet-Darstellung.

- a) Wie transformieren sich die Eigenwerte μ_j (charakteristische Exponenten) von R in die Eigenwerte m_j (charakteristische Multiplikatoren) von M und umgekehrt?
- b) Welche Beziehung besteht zwischen den Eigenvektoren beider Matrizen?
- c) Überprüfen Sie Ihre Aussagen an den Matrizen

$$R_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Entwickeln Sie eine MATLAB- oder eine C-Funktion `shooting` zu Algorithmus 16 „Einfaches Schießverfahren ohne Variationssystem“ für periodische Orbits im nicht-autonomen Fall ohne Benutzung des Variationssystems. Ermitteln Sie darin auch die Eigenwerte und zugehörige normierte Eigenvektoren der Monodromiematrix M .

Aufgabe 5

Gegeben ist die DGL 2. Ordnung von E. Philippow

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2 - \dot{x}^2)\dot{x} + x + b(4x^3 - 3x) = B \cos 3t$$

mit Parametern b, B, ε , die ein *subharmonisch erregtes elektrisches Netzwerk* beschreibt. Bestimmen Sie 2π -periodische Lösungen für die Parameterwerte

- a) $b = 1.0, \quad B = 1.0, \quad \varepsilon = 3.0,$
- b) $b = 1.0, \quad B = 0.3, \quad \varepsilon = 3.0,$
- c) $b = 1.0, \quad B = 0.3, \quad \varepsilon = 0.75.$

Versuchen Sie, im Fall a) exakte Lösungen zu bestimmen. Welche der erhaltenen Lösungen sind asymptotisch stabil, welche sind instabil?

Aufgabe 6

Entwickeln Sie eine MATLAB- oder eine C-Funktion `contperiodauto` zu Algorithmus 38 „Fortsetzung periodischer Orbits“ im autonomen Fall mit Stabilitätsanalyse unter Nutzung des Variationssystems. Stellen Sie damit auch die charakteristischen Multiplikatoren zusammen mit dem Einheitskreis in der komplexen Ebene grafisch dar. Beachten Sie dazu Bemerkung 40.

Aufgabe 7

Gegeben ist das DGL-System 2. Ordnung von Philippow und Büntig (1992)

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x}^3 - \beta \dot{x} + (1 + B \sin 2t)x = 0$$

mit Amplitude $B = 0.1$, den Werten $\alpha = \varepsilon - B$, $\beta = \varepsilon/2 - B$ und dem reellen Parameter $\varepsilon > 0$. Es beschreibt ein *parametrisch erregtes elektrisches Netzwerk mit subharmonischer Systemantwort*. Bestimmen Sie 2π -periodische Lösungen, verschieden von der trivialen Lösung $x \equiv 0$, für den Parameterbereich $0 < \varepsilon < 2$ durch Lösungsfortsetzung. Detektieren Sie dabei Bifurkationen und analysieren Sie deren Typen!

Aufgabe 8

Zu gegebener (n, n) -Monodromiematrix M sollen die *Testfunktionen* für Bifurkationen periodischer Orbits

$$\begin{aligned} \tau_{\text{Fold}}(\lambda) &= \det(M - I) && \text{für Fold-, Pitchfork- oder transkritische Bifurkation} \\ \tau_{\text{Flip}}(\lambda) &= \det(M + I) && \text{für Flip-Bifurkation} \\ \tau_{\text{Torus}}(\lambda) &= \det(M \odot M - I) && \text{für Torus-Bifurkation} \end{aligned}$$

in MATLAB oder C programmiert werden. Wie lauten entsprechende Testfunktionen, die die Eigenwerte mit `eig(M)` benutzen? Vergleichen Sie an selbst gewählten Matrizen M verschiedener Größe n die Rechenzeiten.

Aufgabe 9

Gegeben ist die parameterabhängige Poincaré-Abbildung $P_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eines dynamischen Systems durch

$$P_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx - \omega y - cx(x^2 + y^2) \\ \omega x + sy - cy(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

mit den parameterabhängigen Größen $s = \omega = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \mu)$ und der Konstanten $c > 0$.

- Stellen Sie für Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Poincaré-Abbildung grafisch dar. Wählen Sie $c = 1$ und verschiedene μ -Werte. Welche Lösungstypen für das dynamische System sind zu vermuten?
- Weisen Sie nach, daß P_μ am Bifurkationswert $\mu = 0$ alle Voraussetzungen des Satzes von Neimark-Sacker für die Torusbifurkation erfüllt.
- Wie sieht der Zweig invarianter Tori für $\mu > 0$ formelmäßig aus?

Aufgabe 10

Auf $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei die Möbius-Transformation $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ gegeben durch

$$f(z) := \frac{1+z}{1-z};$$

das heißt insbesondere $f(1) = \infty$, $f(\infty) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1+z}{1-z} = -1$.

- Ist f bijektiv? Auf welche Menge wird $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ abgebildet? Auf welche Punkte wird die imaginäre Achse abgebildet?
- Betrachten Sie zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die transformierte Matrix

$$B := (I - A)^{-1}(I + A), \quad I - \text{Einheitsmatrix.}$$

Wie werden die Eigenwerte μ und die Eigenvektoren v von A transformiert?

- Es sei (x^0, λ_0) eine Gleichgewichtslage und $A = D_x f(x^0, \lambda_0)$ die zugehörige Jacobi-Matrix des Systems $\dot{x} = f(x, \lambda)$. Wie kann man mit Hilfe von **b)** einen Test auf asymptotische Stabilität durchführen, ohne sämtliche Eigenwerte berechnen zu müssen?

Aufgabe 11

W. F. Langford betrachtet ein dynamisches System der Hydrodynamik, das nach mehreren analytischen Problemtransformationen auf folgendes DGL-System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (z - 0.7)x - \omega y \\ \dot{y} &= \omega x + (z - 0.7)y \\ \dot{z} &= 0.6 + z - \frac{1}{3}z^3 - (x^2 + y^2)(1 + \varrho z) + \varepsilon z x^3 \end{aligned} \tag{105}$$

mit positiven reellen Parametern ω , ϱ und ε führt.

- a) Stellen Sie die Attraktoren im Falle $\omega = 3.5$ und $\varepsilon = 0$ für Parameterwerte $\varrho = 1.0, 0.7, 0.62, 0.60, 0.5, 0.25$ im Phasenraum dar. Bestimmen Sie – durch geeigneten Ansatz und ehrliches Ausrechnen – den periodischen Orbit γ .
- b) Es gelte weiterhin $\omega = 3.5$ und $\varepsilon = 0$. Für welche Parameterwerte ϱ ist dann γ orbital stabil? Bestimmen Sie (formelmäßig und numerisch) den Bifurkationswert ϱ^* , an dem der Stabilitätsverlust von γ eintritt. Welcher Bifurkationstyp liegt vor (Begründung)?
- c) Stellen Sie auch die Attraktoren im Falle $\omega = 3.5$ und $\varrho = 0.25$ für Parameterwerte $\varepsilon = 0, 0.02, 0.04, 0.06, 0.07$ im Phasenraum dar und interpretieren Sie die Typen der auftretenden Bifurkationen.

Literaturverzeichnis

- Abraham R. H. und Shaw C. D. (1989) *Dynamics - The Geometry of Behavior, Part One: Periodic Behavior*. 4th printing, Aerial Press, Santa Cruz, California.
- Anishchenko V. S. (1987) *Dynamical Chaos – Basic Concepts*. Teubner-Texte zur Physik, B.G. Teubner Verlag, Leipzig.
- Ascher U. M., Mattheij R. M. und Russell R. D. (1995) *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. SIAM Publications, Philadelphia.
- Ascher U. M. und Petzold L. R. (1998) *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM Publications, Philadelphia.
- Beyn W. J. (1991) *Numerical Methods for Dynamical Systems*. In: Light W. (Hrsg.), *Advances in Numerical Analysis*, Volume I. Clarendon Press, Oxford.
- Bünting W. G. und Vogt W. (1998) *Non-linear Basic Circuits for Modelling Energetic Systems*. In: *Non-Linear Electromagnetic Systems*. ISO Press, Amsterdam, S.531-534.
- Doedel E. J., Paffenroth R. C., Champneys A. R., Fairgrieve T. F., Kuznetsov Y. A., Oldeman B. E., Sandstede B. und Wang X. (2002) *AUTO 2000 - Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont), users guide*. Concordia University, Montreal, P.Q., Canada.
- Doedel E. J., Govaerts W. und Kuznetsov Y. A. (2003) *Computation of Periodic Solution Bifurcations in ODEs Using Bordered Systems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 41, S.401-435.
- Ernst M. (2004) *Numerische Bifurkationsanalyse nichtlinearer energetischer Systeme*. Diplomarbeit, TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften.
- Guckenheimer J. und Holmes P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences 42. Springer-Verlag, New York.
- Hermann M. (2004) *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Oldenbourg Verlag, München.
- Hoffmann A., Marx B. und Vogt W. (2005) *Mathematik für Ingenieure. Band 1: Lineare Algebra, Analysis – Theorie und Numerik*. Pearson Studium, München.
- Hoffmann A., Marx B. und Vogt W. (2006) *Mathematik für Ingenieure. Band 2: Vektoranalysis, Integraltransformationen, Differenzialgleichungen, Stochastik – Theorie und Numerik*. Pearson Studium, München.
- Keller H. B. (1976) *Numerical Solution of Two-Point BVP's*. SIAM Publications, Philadelphia.
- Keller H. B. (1987) *Numerical Methods in Bifurcation Problems*. Springer-Verlag, Berlin.
- Kubíček M. und Marek M. (1983) *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Kuznetsov Y. A. (1995) *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York.
- Langford W. F. (1984) *Numerical Studies of Torus Bifurcations*. In: *International Series of Numerical Mathematics*, Vol.70, Birkhäuser Verlag, Basel.
- Lynch S. (2001) *Dynamical Systems with Applications using MAPLE*. Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin.

- Marsden J. E. und McCracken M. (1976) *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer-Verlag, New York.
- Marx B. und Vogt W. (2010) *Dynamische Systeme – Theorie und Numerik*. Erscheint bei Spektrum-Verlag, Heidelberg.
- Moore G. (1996) *Computation and parametrisation of invariant curves and tori*. SIAM J. on Numer. Anal., 33, No.6, S. 2333-2358.
- Parker T. S. und Chua L. O. (1989) *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Perko L. (1996) *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York.
- Peterseim D. (2004) *Numerische Analyse parameterabhängiger periodischer Orbits nichtlinearer dynamischer Systeme mittels Mehrzielmethode und effizienter Fortsetzungstechniken*. Diplomarbeit, TU Ilmenau, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften.
- Philippow E. S. und Büntig W. G. (1992) *Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme der Elektrotechnik*. Carl Hanser Verlag, München.
- Pontrjagin L. S. (1965) *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Reitmann V. (1996) *Reguläre und chaotische Dynamik*. B.G. Teubner Verlag, Leipzig.
- Seydel R. (1991) *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer-Verlag, New York.
- Vogt W. (2010) *Zur Numerik nichtlinearer dynamischer Systeme – Teil 1: Gleichgewichtslösungen*. Preprint Nr.10 - 2010, TU Ilmenau, Institut für Mathematik.
- Vogt W. und Büntig W. G. (1998) *Nonlinear Circuit Models for the Analysis of Energetic Systems*. Proceedings of the 43rd Internat. Sci. Colloquium, TU Ilmenau, Sept. 21-24,1998, S.138-143.
- Vogt W. und Büntig W. (2003) *Numerical Bifurcation Analysis of Nonlinear Power Systems*. Proceedings of the 48th Int. Wiss. Kolloquium, TU Ilmenau, 22.-25.09.2003, S. 373-374.